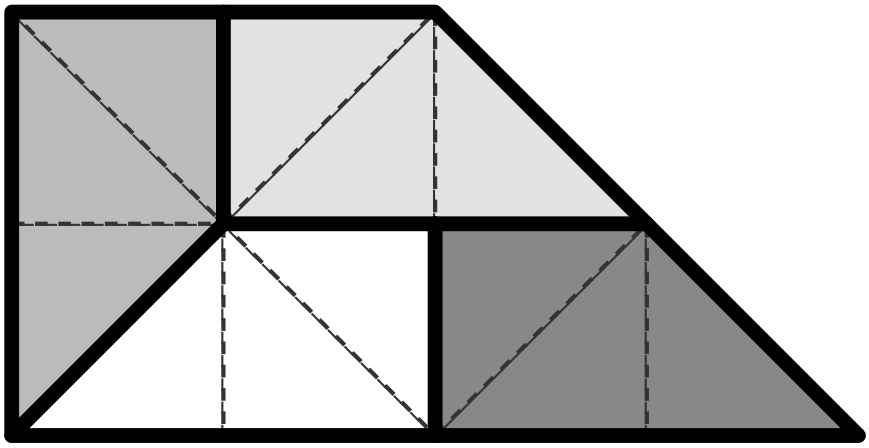
Una dissecció fàcil

La solució de Dudeney

La solució d'aquest trencaclosques es veu a la il·lustració. Si es divideix la figura en dotze triangles iguals, és fàcil descobrir per on s'han de fer els talls: són les línies gruixudes.



Les quatre peces: cadascuna és la figura sencera a mitja mida.

Nota del matemàtic

Una figura que es reprodueix. Cada una de les quatre peces és una còpia de la figura sencera, a mitja mida. Les figures que es poden tallar en còpies iguals d'elles mateixes, més petites, s'anomenen *rep-tiles*; el nom el va posar el matemàtic Solomon Golomb el 1962. I com que cada peça té la mateixa forma que la figura, també es pot tallar en quatre, i cada trosset en quatre més, i així sense fi.

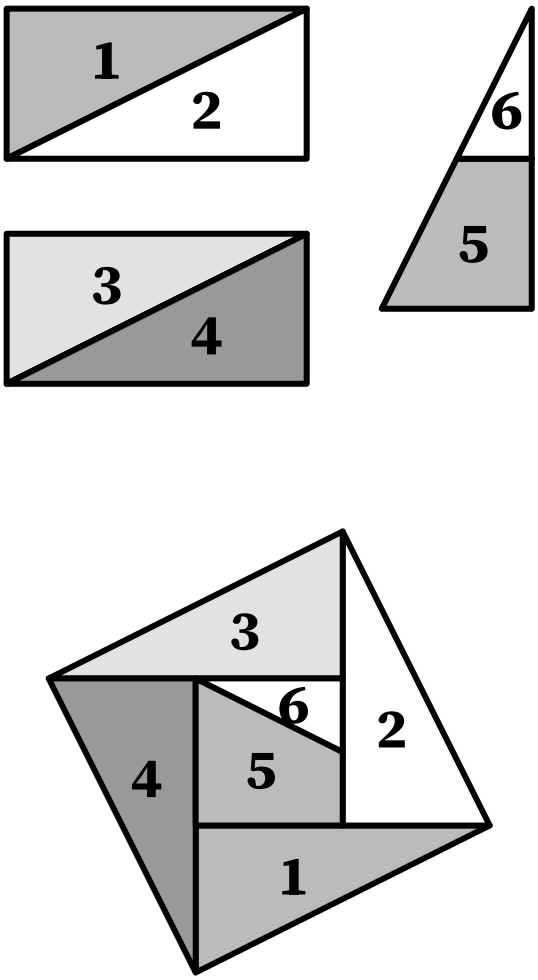
Comprovat per ordinador. Un programa que prova totes les maneres de repartir els dotze triangles en quatre grups de tres troba que només n'hi ha una que doni quatre peces iguals: la de Dudeney.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Un quadrat fàcil

La solució de Dudeney

El diagrama s’explica tot sol: una de les cinc peces s’ha tallat en dues per formar el quadrat.



Quatre triangles al voltant d’un quadret, que s’omple amb el cinquè triangle tallat en dues peces.

Nota del matemàtic

Pitàgores amb peces. Aquesta figura és una de les demostracions més antigues del teorema de Pitàgores; se sol atribuir al matemàtic indi Bhaskara (segle XII). Quatre triangles rectangles de catets a i b al voltant d’un quadrat de costat $b - a$ formen un quadrat de costat c, la hipotenusa. Comptant les àrees: $c^2 = 4 \cdot ab/2 + (b - a)^2 = a^2 + b^2$. Aquí, $a = 1$ i $b = 2$: $c^2 = 4 + 1 = 5$.

Comprovat per ordinador. Les sis peces, a les posicions de la figura de Dudeney, omplen el quadrat sense forats ni trossos de més. Vegeu també «El problema del fuster»: el seu quadrat també té un costat de $\sqrt{5}$.

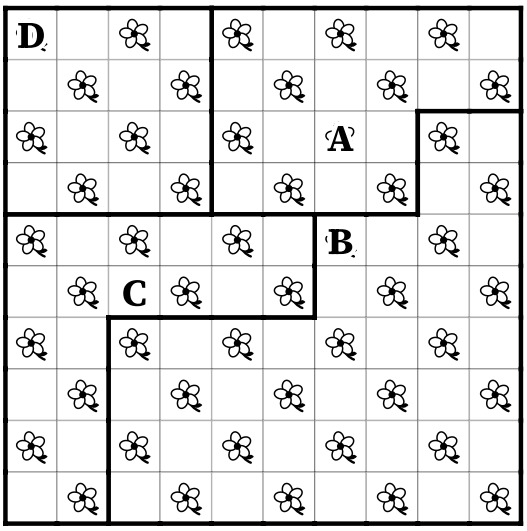
Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Els quadrats de brocat

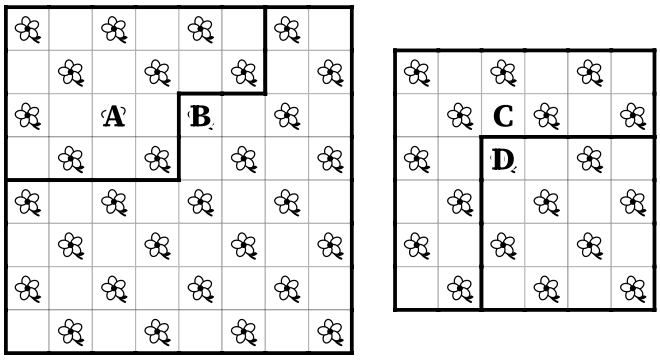
La solució de Dudeney

Per tot el que he pogut esbrinar, només hi ha una solució possible que compleixi les condicions. Les peces encaixen com al diagrama 1, i els diagrames 2 i 3 mostren com s'han de tallar els dos quadrats originals. Es veu que les peces A i C tenen vint quadrets cadascuna, i per tant tenen la mateixa àrea.

1



2 i 3



Al llibre hi ha encara un altre diagrama, el 4, que també resol el trencaclosques, excepte la petita condició que hi ha en les paraules «vaig tallar els dos quadrats»: en aquest cas el quadrat petit es conserva sencer. Tanmateix, el dono com a exemple d'una característica del trencaclosques. En un problema d'aquesta mena és impossible donar un quart de volta a cap peça si el dibuix ha de casar, però podem donar mitja volta a una peça simètrica, és a dir, posar-la cap per avall. Que en aquests problemes de quadriculats es pugui donar a una peça un quart de volta, mitja volta o cap volta depèn del caràcter del dibuix, del material i també de la forma de la peça.

Nota del matemàtic

Pitàgores amb peces. $6^2 + 8^2 = 10^2$: els dos quadrats es poden posar sobre els catets d'un triangle rectangle de costats 6, 8 i 10, i el quadrat gran sobre la hipotenusa. Dudeney ho fa amb només quatre peces, tallant pel quadriculat i sense girar-ne cap. Els talls fan graons, com una escala: és una de les tècniques clàssiques de les disseccions.

Per què el dibuix ha de casar. A la roba, les flors alternen com les caselles d'un tauler d'escacs: hi ha flor quan la fila més la columna és un nombre parell. Si es mou una peça un nombre enter de quadrets, el dibuix queda bé només si el desplaçament total (els quadrets en horitzontal més els quadrets en vertical) és parell. A la solució de Dudeney, totes quatre peces es desplacen 4 quadrets en total.

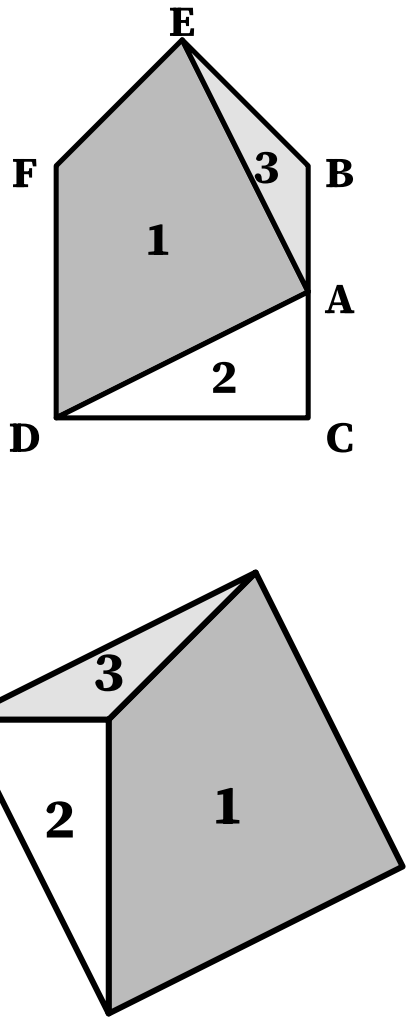
Comprovat per ordinador. Les quatre peces de Dudeney, de 20, 44, 20 i 16 quadrets, omplen el quadrat de 10 × 10 sense forats ni encavalcaments, i el dibuix hi casa. Que sigui l'única solució, com diu Dudeney, no ho hem comprovat.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

El problema del fuster

La solució de Dudeney

Res no podria ser més fàcil que la solució d’aquest trencaclosques… quan saps com fer-ho. I tanmateix sol desconcertar força el principiant si el vol resoldre amb el mínim de peces possible: tres. Només cal trobar el punt A, a mig camí entre la B i la C, i tallar de la A a la D i de la A a la E. Les tres peces formen llavors un quadrat, com es veu a la figura.



Els talls de la A a la D i de la A a la E, i el quadrat que formen les tres peces.

És clar que les proporcions de la figura original han de ser les correctes: el triangle BEF és exactament una quarta part del quadrat BCDF. Si traceu les línies de la B a la D i de la C a la F, es veurà clarament.

Nota del matemàtic

Per què funciona. Els talls A–D i A–E fan √5 de llarg (són la diagonal d’un rectangle de 2 × 1 i la d’un d’1 × 2) i formen un angle recte. Per això la peça gran ja té dos costats del quadrat, i els dos triangles petits (catets 1 i 2, i 1 i √2) omplen exactament el que falta. És la mateixa idea que «Un quadrat fàcil»: tots dos quadrats tenen àrea 5.

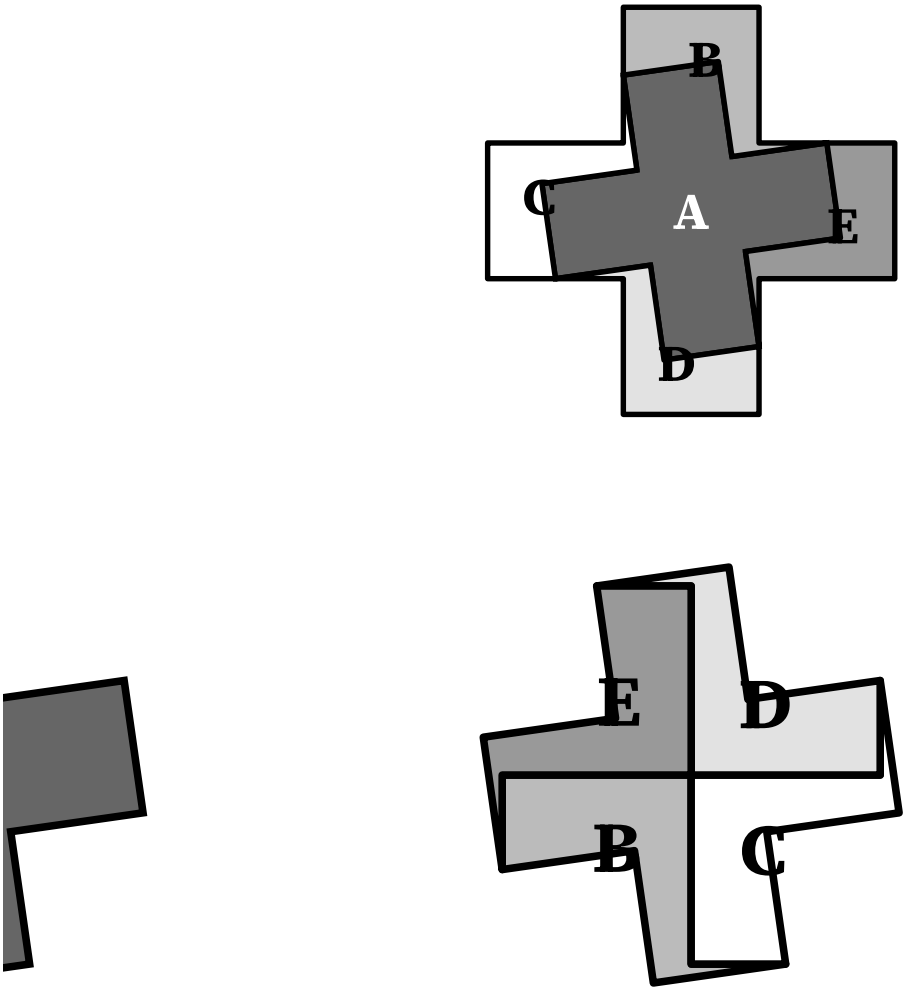
Comprovat per ordinador. Les tres peces, a les posicions de la figura de Dudeney, omplen el quadrat sense forats ni trossos de més, i la fusta sencera té exactament l’àrea del quadrat: 5.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Dues creus d'una

La solució de Dudeney

Es veurà que una de les creus es retalla sencera, com la A de la figura 1, mentre que les quatre peces marcades B, C, D i E formen la segona creu, com a la figura 2, que serà exactament de la mateixa mida que l'altra. Deixo al lector la feina agradable de descobrir per ell mateix la millor manera de trobar la direcció dels talls. Fixeu-vos en la forma de molinet que tornen a fer els talls.



A l'esquerra, la creu tallada (figura 1); a la dreta, la segona creu (figura 2).

Ara es planteja una qüestió difícil: com podem tallar tres creus gregues d'una amb el mínim de peces? De fet, es pot fer amb només tretze peces; però, com que sé que molts dels meus lectors, geòmetres experts, estaran contents de tenir alguna cosa en què treballar sense que se'ls mostri la solució, de moment deixo el misteri sense revelar.

Nota del matemàtic

Per què funciona. Cada creu petita ha de tenir la meitat de l'àrea, i per tant els seus costats han de ser els de la gran dividits per $\sqrt{2}$. La creu A és la creu gran reduïda així i girada un angle petit, d'uns 8°: el que té tangent 1/7. Amb aquest gir, les puntes dels braços de la A toquen just els costats de la creu gran, i el que queda són quatre peces iguals que, sense girar-les, formen una altra creu igual que la A.

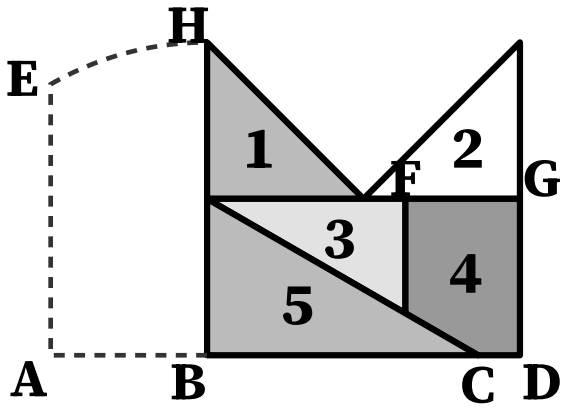
Comprovat per ordinador. Amb la creu gran de braços d'1 × 1, tots els vèrtexs de les peces tenen coordenades exactes (en desenes), cada peça fa 0,625 d'àrea, la A fa 2,5 i les quatre peces omplen la segona creu sense forats ni trossos de més.

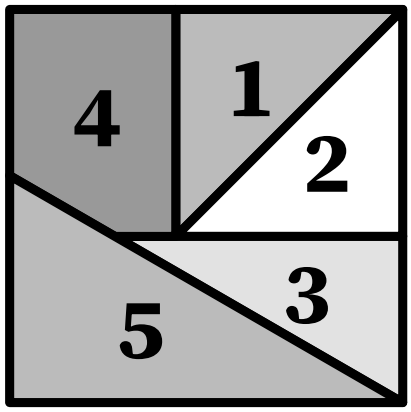
Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

La mitra

La solució de Dudeney

El diagrama mostra com tallar la mitra en cinc peces que formen un quadrat. Les línies de punts serveixen per trobar els punts C i F, que són l'única dificultat. AB és la meitat de BD, i AE és paral·lela a BH. Amb la punta del compàs a B es traça l'arc HE, i AE serà la distància de C a B. Llavors, FG és igual a BC menys AB.





La construcció de Dudeney (amb el compàs a B, l'arc HE) i el quadrat que formen les cinc peces.

Aquest trencaclosques, amb la condició afegida que s'ha de tallar en quatre parts de la mateixa mida i la mateixa forma, no l'he pogut trobar en cap llibre anterior a 1835. En sentit estricte, així és impossible de resoldre; la resposta que sempre es dona fa trampa, perquè suposa que dues porcions que només es toquen per un punt («per un pèl») són una sola peça.

Nota del matemàtic

Per què la construcció dona √3. Si BD = 2, AB = 1 i BE = BH = 2 (el radi del compàs), el triangle ABE és rectangle en A i, per Pitàgores, AE = $\sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{3}$. Com que la mitra té una àrea de 3, el quadrat ha de tenir un costat de √3: per això BC = AE.

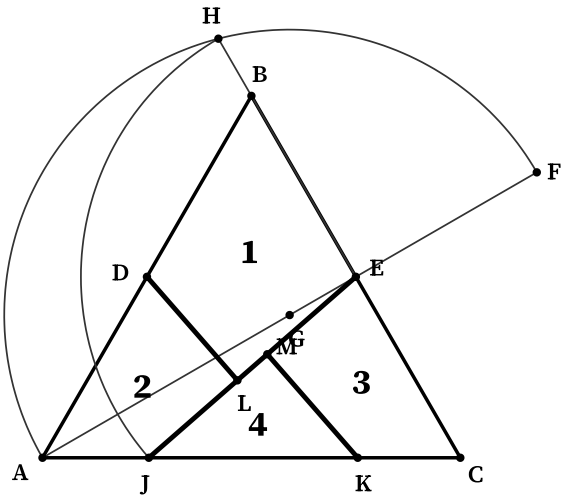
Comprovat per ordinador. Les cinc peces, a les posicions de la figura de Dudeney, omplen el quadrat de costat √3 sense forats ni trossos de més. Els comptes de l'escala també són correctes: 84 × 63 = 72 × 73½ = 5292, que és l'àrea de la mitra (tres quarts de 84^2), i 61 5/7 × 84 = 5184 = 72^2.

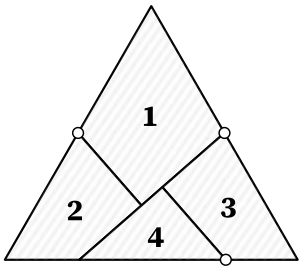
Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

El trencaclosques del mercer

La solució de Dudeney

La il·lustració mostra com es pot tallar el tros de roba triangular en quatre peces que encaixen i formen un quadrat perfecte. Divideix AB per la meitat a D i BC a E; allarga la línia AE fins a F de manera que EF sigui igual a EB; divideix AF per la meitat a G i traça l'arc AHF; allarga EB fins a H: EH és la llargària del costat del quadrat. Des d'E, amb radi EH, traça l'arc HJ, i fes JK igual a BE. Ara, des dels punts D i K, baixa perpendiculars a EJ, que la tallen a L i a M. Si ho has fet amb cura, ja tens les línies per on cal tallar.





A l'esquerra, la construcció de Dudeney (els talls són les línies gruixudes). A la dreta, la cadena de caoba amb frontisses de llautó: fes córrer el control.

Vaig presentar aquest problema a la Royal Society, a Burlington House, el 17 de maig de 1905, i també a la Royal Institution el mes següent, en una forma més general: «Un nou problema de superposició: demostració que un triangle equilàter es pot tallar en quatre peces que es poden tornar a muntar formant un quadrat, amb alguns exemples d'un mètode general per transformar per dissecció qualsevol triangle en un quadrat». També es va publicar com a repte per als lectors del *Daily Mail* (números de l'1 i el 8 de febrer de 1905), però, tot i que van arribar centenars de respostes, no n'hi va haver cap de correcta. S'ha de reconèixer el mèrit del senyor C. W. M'Elroy, l'únic que em va enviar la solució correcta quan vaig publicar el problema per primera vegada, al *Weekly Dispatch*, el 1902.

Afegeixo una il·lustració que mostra el trencaclosques en una forma pràctica força curiosa: fet de caoba polida amb frontisses de llautó, per a certs públics. Les quatre peces formen una mena de cadena: plegades cap a un costat fan el triangle i, cap a l'altre, el quadrat.

Nota del matemàtic

Per què EH és el costat del quadrat. L'àrea del triangle és base × altura / 2 = EB × AE. El punt H és a la semicircumferència de diàmetre AF, i EH és perpendicular a AF, perquè l'altura AE és perpendicular a BC. Pel teorema de l'altura, $EH^2 = AE \times EF = AE \times EB$: el quadrat de costat EH té la mateixa àrea que el triangle. És la construcció clàssica de la *mitjana geomètrica*, que ja és als *Elements* d'Euclides.

Quatre peces és el mínim. Dudeney va publicar el trencaclosques al seu diari el 1902, i durant més de cent anys ningú no va saber si es podia fer amb tres peces. El 2024, Erik Demaine, Tonan Kamata i Ryuhei Uehara van demostrar que no: si no es pot girar cap peça del revés, no hi ha cap manera de transformar el triangle en el quadrat amb tres peces o menys. Si es poden girar del revés, encara no se sap!

Una cadena de frontisses. Les quatre peces, unides per tres frontisses (a D, a E i a K), fan una cadena que es plega cap a un costat i cap a l'altre. És una de les primeres disseccions articulades conegudes, i la més famosa. Prova-ho amb el control lliscant de la solució.

Comprovat per ordinador. Hem refet la construcció de Dudeney amb coordenades: per a un triangle de costat 6, el costat del quadrat surt 3,948…, l'arrel quadrada de l'àrea del triangle, tal com cal. Mostrejant 90 000 punts, les quatre peces cobreixen el quadrat sense forats ni encavalcaments, i la cadena de frontisses passa del triangle al quadrat sense que les peces es trepitgin.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Les sis granotes

La solució de Dudeney

Moveu les granotes en aquest ordre: 2, 4, 6, 5, 3, 1 (i repetiu aquests moviments dues vegades més, en el mateix ordre); després, 2, 4, 6. És una solució de vint-i-un moviments, el mínim possible.



Al final: 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Si el nombre de granotes, n, és parell, calen $(n^2 + n)/2$ moviments, dels quals $(n^2 - n)/2$ són salts i n són passos simples. Si n és senar, calen $(n^2 + 3n)/2 - 4$ moviments, dels quals $(n^2 - n)/2$ són salts i $2n - 4$ són passos simples.

En els casos parells, escriviu tots els nombres parells en ordre creixent i els senars en ordre decreixent. Aquesta sèrie s'ha de repetir $n/2$ vegades i acabar, una sola vegada, amb els parells en ordre creixent. Així, la solució per a 14 granotes és (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1) repetida 7 vegades i seguida de 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14: 105 moviments.

En els casos senars, escriviu els parells en ordre creixent i els senars en ordre decreixent, i repetiu aquesta sèrie $(n - 1)/2$ vegades; continueu amb els parells en ordre creixent (sense el $n - 1$) i els senars en ordre decreixent (sense l'1), i acabeu amb tots els nombres en l'ordre natural (sense l'1 ni el n). Així, per a 11 granotes: (2, 4, 6, 8, 10, 11, 9, 7, 5, 3, 1) repetida 5 vegades; després 2, 4, 6, 8, 11, 9, 7, 5, 3, i finalment 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10: 73 moviments.

Aquesta solució general completa es publica aquí per primera vegada.

Nota del matemàtic

Per què no es pot fer amb menys salts. Al final, cada parella de granotes ha d'haver canviat d'ordre: el 2, que anava darrere de l'1, ha d'acabar davant seu, i així amb totes les parelles. Amb n granotes hi ha $n(n - 1)/2$ parelles, i cada salt fa canviar d'ordre exactament *una* parella (la granota que salta i la que és saltada); un pas no en canvia cap. Per tant, calen com a mínim $n(n - 1)/2$ salts: 15 amb sis granotes. Els salts de Dudeney són justament aquests; el que es pot estalviar són els passos.

Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada (que prova totes les posicions possibles, de menys a més moviments) confirma que amb 2, 3, …, 9 granotes el mínim és el de la fórmula de Dudeney: 21 amb sis granotes i 31 amb set. També hem comprovat que la seva recepta general funciona fins a 14 granotes.

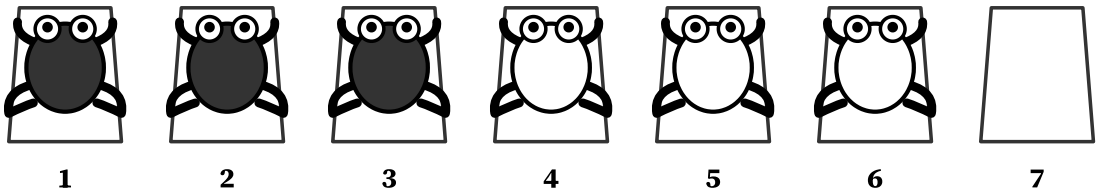
Un detall: amb una sola granota la fórmula dels senars dona −2, i és clar que no cal cap moviment. Dudeney pensava en més granotes.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Les granotes ensinistrades

La solució de Dudeney

Els salts següents resolen el trencaclosques en deu moviments: del 2 a l'1, del 5 al 2, del 3 al 5, del 6 al 3, del 7 al 6, del 4 al 7, de l'1 al 4, del 3 a l'1, del 6 al 3 i del 7 al 6.



Al final: les negres als gots 1, 2 i 3, les blanques als gots 4, 5 i 6, i el 7 buit.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada per totes les posicions possibles (quin color hi ha a cada got) confirma que 10 salts és el mínim. Dels deu salts de Dudeney, cinc passen per sobre de dues granotes, dos per sobre d'una i tres són passos al got del costat.

Només hi ha dues solucions de deu salts. La de Dudeney i una altra: $2\to1$, $5\to2$, $7\to5$, $4\to7$, $1\to4$, $2\to1$, $5\to2$, $3\to5$, $6\to3$, $7\to6$. I aquesta segona és la de Dudeney mirada al revés: si fas els seus salts de l'últim al primer (canviant d'on i cap on) i després mires els gots en un mirall (l'1 passa a ser el 7, el 2 el 6…), surt l'altra. Passa perquè la posició final, vista en un mirall, és justament la inicial.

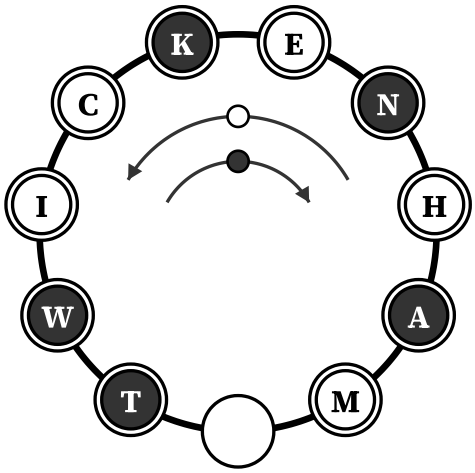
I amb salts més curts o més llargs? Si les granotes només poguessin saltar per sobre d'una (com a «Les sis granotes»), en caldrien 15. Si poguessin saltar per sobre de fins a tres, n'hi hauria prou amb 5.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

El trencaclosques de Twickenham

La solució de Dudeney

Moveu les fitxes en aquest ordre: K, C, E, K, W, T, C, E, H, M, K, W, T, A, N, C, E, H, M, I, K, C, E, H, M, T, i ja som a Twickenham. La mateixa posició de les fitxes us dirà, cada vegada, si toca fer un salt o un pas.



Al final: TWICKENHAM, amb el disc buit a baix.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Des de la posició inicial es poden arribar a formar 16 060 posicions diferents. Una cerca en amplada per totes elles confirma que 26 moviments és el mínim. I encara més: la solució de Dudeney és l’*única* de 26 moviments.

Salts i passos. Dels 26 moviments de Dudeney, 19 són salts i 7 són passos. No és casualitat: comptant les caselles que ha d’avançar cada fitxa fins al seu lloc, les negres n’han de fer 17 en total i les blanques 28, és a dir, 45 (si cap fitxa no fa cap volta de més). Un pas en fa avançar una i un salt, dues; per tant, amb p passos i s salts, $p + 2s = 45$. Amb 26 moviments, $p + s = 26$, i d’aquí surt $s = 19$ i $p = 7$.

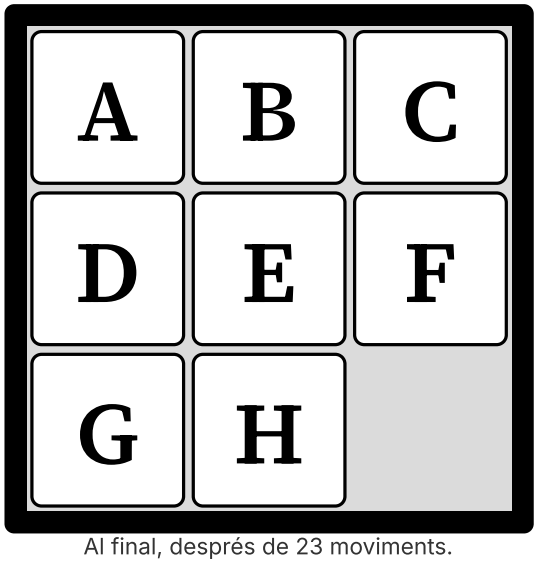
És un parent de «Les sis granotes» i de «Les granotes ensinistrades»: fitxes que s’han de creuar fent salts, i on el que s’estalvia són els passos.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Les lletres a la capsa

La solució de Dudeney

Aquest trencaclosques es pot resoldre en 23 moviments, el mínim possible. Moveu els blocs en aquest ordre: A, B, F, E, C, A, B, F, E, C, A, B, D, H, G, A, B, D, H, G, D, E, F.



Al final, després de 23 moviments.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada per totes les posicions a què es pot arribar confirma que 23 moviments és el mínim, i que la seqüència de Dudeney és l’*única* de 23 moviments. Des de la posició inicial, la posició més llunyana necessita 31 moviments.

La meitat de les posicions són impossibles. Els vuit blocs i el forat es poden col·locar de 9! = 362 880 maneres, però des de la posició inicial només se’n pot arribar a la meitat, 181 440. Si en una posició es canvien de lloc dos blocs (traient-los de la capsa), s’arriba a l’altra meitat, i ja no hi ha manera de resoldre-ho. Ho van demostrar W. W. Johnson i W. E. Story el 1879 per al trencaclosques del 15, que aquells anys feia furor: cada moviment és un intercanvi del forat amb un bloc, i la paritat del nombre d’intercanvis (parell o senar) està lligada al lloc on és el forat.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

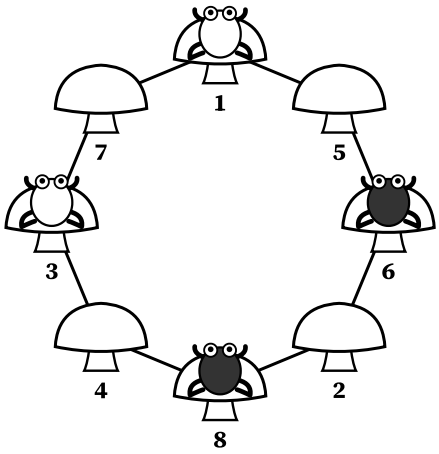
Les quatre granotes

La solució de Dudeney

El mínim de moviments, comptant-los un per un, és setze. Però el trencaclosques es pot resoldre en set jugades, si compten com una de sola tots els moviments seguits d’una mateixa granota. Cada parèntesi és una jugada, i els números són els dels bolets: (1–5), (3–7, 7–1), (8–4, 4–3, 3–7), (6–2, 2–8, 8–4, 4–3), (5–6, 6–2, 2–8), (1–5, 5–6), (7–1).

És el conegut problema de Guarini, proposat el 1512, i el poso aquí per explicar el meu mètode dels «botons i fils» per resoldre aquesta mena de problemes de fitxes que es mouen. La manera antiga de presentar el problema de Guarini és amb dos cavalls blancs i dos de negres en un tauler de 3 × 3, que han de canviar de lloc. A «Les quatre granotes», les línies indiquen cap on es pot moure cada granota, perquè el lector no hagi de saber com es mou el cavall dels escacs; però es veu de seguida que els dos problemes són idèntics. La casella del mig, és clar, no compta, perquè cap cavall no hi pot entrar mai.

Ara imagineu que els bolets són botons i les línies, fils. Si desemboliquem els fils, podem dibuixar el diagrama com a la figura, on la relació entre els botons és exactament la mateixa. Qualsevol solució en aquesta figura serveix per a l’altra. Poseu les granotes blanques a l’1 i al 3 i les negres al 6 i al 8, i veureu com n’és, de senzilla, la solució: només cal fer girar les granotes pel cercle, en un sentit o en l’altre. Feu les jugades de més amunt i veureu que tota dificultat ha desaparegut.



Els mateixos bolets i les mateixes línies, desembolicats: un sol cercle (1, 5, 6, 2, 8, 4, 3, 7).

Nota del matemàtic

Per què setze moviments. Al cercle, les granotes no es poden avançar: l’ordre en què hi són es manté. Comptant els llocs del cercle (1, 5, 6, 2, 8, 4, 3, 7), les blanques són als llocs 1r i 7è i les negres, al 3r i al 5è, i han d’acabar a l’inrevés. L’única manera de fer-ho sense que ningú s’avanci és que totes girin quatre llocs en el mateix sentit: 4 granotes × 4 moviments = 16.

Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada confirma els dos mínims de Dudeney: 16 moviments i 7 jugades, i que la seva solució és vàlida.

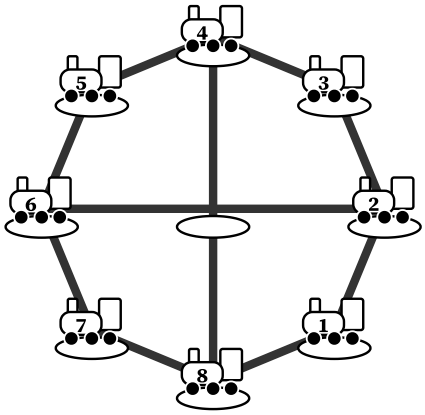
Paolo Guarini di Forlì va proposar el problema dels cavalls en un manuscrit del 1512, i és un dels trencaclosques d’escacs més antics que es coneixen. El mètode dels «botons i fils» de Dudeney és el que avui en diem treballar amb el *graf* del problema: el que importa no és on són els punts, sinó quins estan units amb quins.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Les vuit locomotores

La solució de Dudeney

La locomotora a la qual han apagat el foc i que, per tant, no es pot moure és la número 5. Moveu les altres en aquest ordre: 7, 6, 3, 7, 6, 1, 2, 4, 1, 3, 8, 1, 3, 2, 4, 3, 2, disset moviments en total, i les vuit locomotores queden en l’ordre que es demanava.



Al final, en ordre en el sentit contrari a les agulles del rellotge; la 5 no s’ha mogut.

Hi ha dues altres solucions lleugerament diferents.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada confirma que, amb la 5 quieta, 17 moviments és el mínim, i que hi ha exactament tres solucions de 17: la de Dudeney i les dues «lleugerament diferents» que esmenta.

Una sorpresa. Si no s’apagués cap locomotora, el mínim continuaria sent 17, i les tres úniques solucions de 17 moviments serien les mateixes: totes deixen la 5 quieta. Per això, si ho resols en 17 moviments a la pantalla, la 5 no s’haurà mogut mai.

I si fos una altra? Si la locomotora apagada fos la 2, en caldrien 19; si fos la 3, 23, i si fos la 8, 25. Amb la 1, la 4, la 6 o la 7 quietes, no hi hauria manera de posar-les en ordre.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Els formatges de l'administrador

La solució de Dudeney

Els 8 formatges es poden passar en 33 moviments; 10 formatges, en 49, i 21 formatges, en 321. Explicaré el meu mètode general per als casos de 3, 4 i 5 tamborets. Escriviu la taula següent, tan llarga com calgui:

Tamborets	Nombre de formatges						
3	1	2	3	4	5	6	7
4	1	3	6	10	15	21	28
5	1	4	10	20	35	56	84
	Nombre de moviments						
3	1	3	7	15	31	63	127
4	1	5	17	49	129	321	769
5	1	7	31	111	351	1023	2815

La primera fila són els nombres naturals. La segona s'obté sumant els naturals des del principi (els nombres triangulars), i la tercera, sumant des del principi els de la segona (els piramidals). La quarta fila són les potències de 2 menys 1. A la cinquena, cada nombre és el doble de l'anterior de la mateixa fila més el que té just a sobre; l'última es fa de la mateixa manera.

Aquesta taula dona de seguida la solució per a qualsevol nombre de formatges amb tres tamborets, per als nombres triangulars amb quatre tamborets i per als piramidals amb cinc. En aquests casos sempre hi ha una sola manera de resoldre-ho, és a dir, de fer les piles. Amb tres tamborets, la primera i la quarta fila ens diuen que 4 formatges es passen en 15 moviments, 5 en 31 i 7 en 127. La segona i la cinquena mostren que, amb quatre tamborets, 10 formatges es passen en 49 moviments i 21 en 321. I amb cinc tamborets, 20 formatges en necessiten 111, i 35 formatges, 351.

La taula també ens diu com s'han de fer les piles. Amb quatre tamborets i 10 formatges, la columna anterior diu que cal fer piles de 6 i de 3, que costen 17 i 7 moviments: primer s'apilen els sis formatges més petits en un tamboret, en 17 moviments; després, els 3 següents en un altre tamboret, en 7; es passa el formatge més gran, en 1 moviment; es tornen a posar els 3 a sobre, en 7, i finalment els 6, en 17. En total, els 49 moviments necessaris.

Si el nombre de formatges no és triangular (amb quatre tamborets) o piramidal (amb cinc), hi ha més d'una manera de fer les piles, i calen taules auxiliars. És el cas dels 8 formatges de l'administrador. Però deixo que el lector treballi pel seu compte aquesta ampliació del problema.

Nota del matemàtic

És la torre de Hanoi, el joc que el francès Édouard Lucas va treure el 1883, però amb un tamboret més. Amb tres tamborets, n formatges necessiten $2^n - 1$ moviments, i és fàcil veure que no es pot fer amb menys: per moure el formatge més gran, tots els altres han d'estar apilats al tercer tamboret.

Amb quatre tamborets, el mètode de Dudeney (apartar un grup de formatges petits, passar els grans amb els tres tamborets que queden i tornar a posar els petits a sobre) és el mateix que el 1941 van proposar J. S. Frame i B. M. Stewart per a qualsevol nombre de tamborets. Que amb quatre tamborets és el millor possible no es va demostrar fins al 2014: ho va fer Thierry Bousch, de la Universitat de París-Sud. Amb cinc tamborets o més, encara no se sap!

Una regularitat preciosa. Amb quatre tamborets, cada formatge nou afegeix una potència de 2: el primer costa 1 moviment, els dos següents 2 cada un, els tres següents 4, els quatre següents 8… Així, per a 21 formatges: $1\cdot1 + 2\cdot2 + 3\cdot4 + 4\cdot8 + 5\cdot16 + 6\cdot32 = 321$.

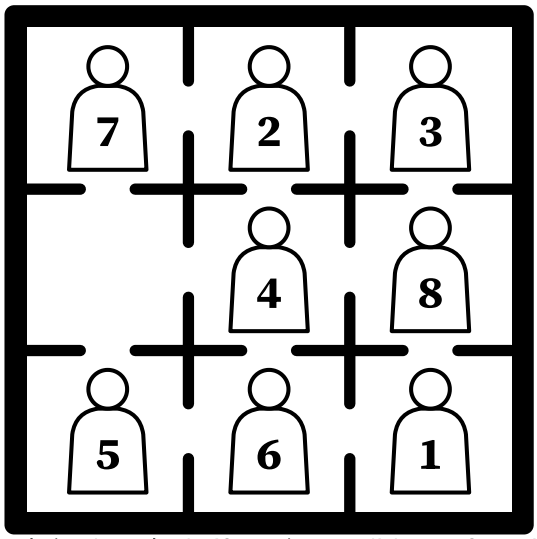
Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada, que prova totes les posicions possibles, confirma que 8 formatges necessiten 33 moviments i 10 formatges, 49. Amb 21 formatges la cerca seria massa llarga, però el resultat de Bousch confirma els 321 de Dudeney.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Vuit alumnes i un quadrat màgic

La solució de Dudeney

Hi ha vuit maneres de formar el quadrat màgic, però totes són aspectes diferents d'una sola disposició fonamental. Així, si fas fer un quart de volta al primer quadrat obtens el segon; i com que qualsevol dels quatre costats es pot posar a dalt, hi ha quatre aspectes. Aquests quatre, reflectits en un mirall, donen els altres quatre.



El quadrat màgic, després de 19 moviments: l'alumne 3 no s'ha mogut.

Doncs bé, d'aquestes vuit disposicions, només quatre es poden aconseguir amb les condicions de l'enunciat, i només dues d'aquestes quatre es poden aconseguir en el mínim de moviments, que és dinou. Aquí tens aquestes dues disposicions:

5		7
6	4	2
1	8	3

7	2	3
	4	8
5	6	1

Mou els alumnes en aquest ordre: 5, 3, 2, 5, 7, 6, 4, 1, 5, 7, 6, 4, 1, 6, 4, 8, 3, 2, 7, i tens el primer quadrat. Mou-los així: 4, 1, 2, 4, 1, 6, 7, 1, 5, 8, 1, 5, 6, 7, 5, 6, 4, 2, 7, i tens la disposició del segon quadrat. En el primer cas s'han mogut tots els alumnes, però en el segon, el número 3 no ha sortit mai de la seva habitació. Per tant, el número 3 és l'alumne que dormia, i el segon quadrat és la disposició que es demanava.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada per totes les 181 440 situacions que es poden assolir des de la inicial confirma tot el que diu Dudeney: dels vuit quadrats màgics, només quatre es poden assolir (en 19, 19, 23 i 25 moviments); en 19 moviments només hi ha exactament dues maneres de fer-ho, que són les seves dues seqüències; i en la segona, l'alumne 3 no es mou mai.

Per què només la meitat. És el mateix que passa amb el trencaclosques del 15 (i amb «Les lletres a la capsa»): de les 9! = 362 880 maneres de col·locar els alumnes i l'habitació buida, des d'una posició només se'n pot arribar a la meitat. Cada moviment canvia la paritat d'una permutació d'una manera que es pot controlar, i això separa les posicions en dues famílies que no es comuniquen mai.

El quadrat de Lo Shu. El quadrat màgic de 3 × 3 és únic, llevat de girs i reflexos: és el mateix que el famós Lo Shu xinès, però amb tots els nombres una unitat més petits (del 0 al 8 en lloc de l'1 al 9).

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

El solitari central

La solució de Dudeney

Aquí tens una solució en dinou moviments; els salts entre parèntesis compten com un sol moviment: 19-17, 16-18, (29-17, 17-19), 30-18, 27-25, (22-24, 24-26), 31-23, (4-16, 16-28), 7-9, 10-8, 12-10, 3-11, 18-6, (1-3, 3-11), (13-27, 27-25), (21-7, 7-9), (33-31, 31-23), (10-8, 8-22, 22-24, 24-26, 26-12, 12-10), 5-17. Ara ja s’han tret totes les fitxes menys una, que queda al forat del centre.

La solució demana criteri, perquè hom té la temptació de fer molts salts en un sol moviment quan seria el contrari d’una bona jugada. Per exemple, després de fer el primer 3-11 d’abans, ve de gust allargar el moviment continuant amb 11-25, 25-27, o amb 11-9, 9-7.

No crec que es pugui reduir el nombre de moviments.

Nota del matemàtic

⚠ **Sí que es pot reduir.** Dudeney no ho creia, però el 1912 Ernest Bergholt ho va fer en **18 moviments**: 5-17, 12-10, 3-11, 18-6, 30-18, 27-25, 24-26, (13-27, 27-25), 9-11, 7-9, (22-24, 24-26, 26-12, 12-10, 10-8), 31-23, 16-28, (33-31, 31-23), (21-7, 7-9), (1-3, 3-11, 11-25), (4-16, 16-28, 28-30, 30-18, 18-16), 15-17. El 1964, John Beasley va demostrar que 18 és el mínim possible.

Comprovat per ordinador. Les dues solucions, la de Dudeney (19 moviments) i la de Bergholt (18), s’han jugat salt per salt al tauler: tots els salts són legals, fan 31 salts en total i deixen una sola bola, al forat 17. També és legal el començament d’exemple de l’enunciat. Que 18 és el mínim, en canvi, no s’ha calculat aquí: és el resultat de Beasley.

Un joc amb història. El solitari de boles es coneix almenys des de la França del segle XVII. Hi ha un gravat de 1697 que mostra una princesa de la cort de Lluís XIV jugant-hi, en un tauler francès de 37 forats.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Travessant el rierol

La solució de Dudeney

Primer travessen els dos fills, i un torna. Després travessa el pare, i l'altre fill torna. Llavors travessen els dos fills, i un torna. Després travessa la mare, i l'altre fill torna. Llavors travessen els dos fills, i un d'ells torna a buscar el gos. Onze travessies en total.

Sembla que no es pot donar cap regla general per resoldre aquests trencaclosques de travessar rius. Per a un cas concret es pot trobar una fórmula que valgui per a qualsevol nombre de persones en les mateixes condicions, però no serveix de gaire, perquè qualsevol petita condició afegida la tomba. Com passa amb els problemes de mesurar, normalment ens hem de refiar de l'enginy de cadascú.

Nota del matemàtic

Un problema de fa més de dotze segles. Alcuí de York, el savi de la cort de Carlemany, ja el va posar al segle VIII en el seu recull *Propositiones ad acuendos iuvenes* («Problemes per esmolar l'enginy dels joves»): un home i una dona que pesen cadascun una càrrega de carro, dos fills que junts en pesen una, i una barca que només en porta una. Dudeney hi afegeix el gos.

El pes del gos. Dudeney no diu quant pesa, però la seva solució només funciona si el gos pesa com a molt 40 kg, perquè ha de travessar amb un fill. Si en pesés més, no hi hauria manera de passar-lo: sol no pot remar, amb un dels pares la barca s'enfonsaria i amb els dos fills, també. I si no pesés res, n'hi hauria prou amb 9 travessies, perquè el gos podria anar amb qualsevol.

Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada per totes les situacions possibles (qui és a cada riba i on és la barca) confirma que, amb un gos d'entre 1 i 40 kg, 11 travessies és el mínim.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Un nou problema de mesures

La solució de Dudeney

La solució següent, en onze manipulacions, mostra què hi ha a cada recipient al principi i després de cada manipulació:

gerra de 10	gerra de 10	mesura de 5	mesura de 4
10	10	0	0
5	10	5	0
5	10	1	4
9	10	1	0
9	6	1	4
9	7	0	4
9	7	4	0
9	3	4	4
9	3	5	3
9	8	0	3
4	8	5	3
4	10	3	3

Nota del matemàtic

Per què es pot fer. Com que no hi ha marques, cada abocada s’acaba quan un recipient queda buit o ple, i per això les quantitats sempre són nombres enters. Amb les mesures de 5 i de 4 es pot obtenir 1 = 5 − 4, i a partir de l’1, qualsevol altra quantitat. És la mateixa idea que diu que, si dos nombres no tenen cap divisor comú (com 5 i 4), sumant-los i restant-los s’arriba a qualsevol enter: la identitat de Bézout.

Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada per totes les situacions possibles (quanta aigua hi ha a cada recipient) confirma que 11 manipulacions és el mínim, i que la taula de Dudeney és correcta pas a pas.

Els problemes de gerres són molt antics. Un dels més coneguts, repartir 8 mesures de líquid en dues parts iguals amb gerres de 5 i de 3, se sol atribuir a Niccolò Tartaglia, al segle XVI.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

El bol de la festa

La solució de Dudeney

El repartiment dels dotze decilitres es pot fer en onze manipulacions, com a la taula. Les sis columnes mostren d'un cop d'ull quanta llimonada hi ha al pitxer, a la gerra de 5 dl i a la de 3, i quanta n'hi ha als gots dels amics X, Y i Z després de cada manipulació (al principi, el pitxer és ple i tota la resta, buida).

pitxer	gerra de 5	gerra de 3	X	Y	Z
7	5	0	0	0	0
7	2	3	0	0	0
7	0	3	2	0	0
7	3	0	2	0	0
4	3	3	2	0	0
0	3	3	2	4	0
0	5	1	2	4	0
0	5	0	2	4	1
0	2	3	2	4	1
0	0	3	4	4	1
0	0	0	4	4	4

I cada amic té els seus quatre decilitres.

Nota del matemàtic

Les persones són recipients diferents. El got d'un amic és com una gerra enorme que mai no es buida: hi pots vessar tant com vulguis, però no en pots treure res. Per això no es pot fer servir per guardar llimonada «de pas», com es fa amb les gerres, i el problema és més difícil del que sembla.

Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada per totes les situacions possibles (quanta llimonada hi ha al pitxer, a cada gerra i a cada got) confirma que 11 manipulacions és el mínim i que la taula de Dudeney és correcta pas a pas. Hi ha 72 maneres de fer-ho en 11 manipulacions; si no importa quin amic és quin, en queden 12.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

El tresor del castell

La solució de Dudeney

Aquesta és la millor solució, en onze manipulacions:

1. Baixa el cofre.
2. Baixa la nena, i puja el cofre.
3. Baixa el noi, i puja la nena.
4. Baixa el cofre.
5. Baixa la dona, i pugen el noi i el cofre.
6. Baixa el cofre.
7. Baixa la nena, i puja el cofre.
8. Baixa el cofre.
9. Baixa el noi, i puja la nena.
10. Baixa la nena, i puja el cofre.
11. Baixa el cofre.

Nota del matemàtic

Tres diferències de 6. Fixa't en els pesos: nena − cofre = 36 − 30 = 6, noi − nena = 42 − 36 = 6 i dona − (noi + cofre) = 78 − 72 = 6. Són les tres úniques maneres que té una persona de baixar, i totes van just al límit. Dudeney va triar els pesos amb molta cura: els seus eren 195, 105, 90 i 75 lliures, amb una diferència de 15; aquí s'han passat a quilos multiplicant per 2/5, i la solució és la mateixa.

Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada per totes les situacions possibles (qui és a dalt i qui és a terra: només n'hi ha 16) confirma que 11 manipulacions és el mínim i que la solució de Dudeney és vàlida pas a pas. Hi ha 8 maneres de fer-ho en 11 manipulacions, i totes fan servir els mateixos onze passos que la de Dudeney, en un ordre una mica diferent.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Cinc entrenadors i una barca

La solució de Dudeney

És clar que el nombre de travessies ha de ser senar, i que si els entrenadors no haguessin desconfiat els uns dels altres, el grup hauria pogut passar en nou travessies. Però cap estrella no podia estar amb un entrenador o més si el seu no hi era, i això obliga a fer dues travessies més: onze en total.

La taula mostra com es podria fer. Les majúscules són els entrenadors i les minúscules, les seves estrelles. Es veu com queden les coses al principi i després de cada travessia, i l'asterisc és la barca. Així, es veu d'un cop d'ull que a la primera travessia passen a, b i c, que a la segona tornen b i c, etc.

	aquesta riba		l'altra riba
	ABCDE abcde *	≈	
1	ABCDE de	≈	* abc
2	ABCDE bcde *	≈	a
3	ABCDE e	≈	* abcd
4	ABCDE de *	≈	abc
5	DE de	≈	* ABC abc
6	CDE cde *	≈	AB ab
7	cde	≈	* ABCDE ab
8	bcde *	≈	ABCDE a
9	e	≈	* ABCDE abcd
10	bc e *	≈	ABCDE a d
11		≈	* ABCDE abcde

Les paraules «la manera més ràpida» amaguen una petita subtilesa. Tothom suposa, i amb raó, que com que no se'ns diu res de com remen, tots remen igual de bé. Però és evident que dues persones remen més de pressa que una. Per tant, a la segona i a la tercera travessia són dues estrelles les que han de tornar amb la barca a buscar la d, i no una de sola. Això no canvia el nombre de travessies, de manera que no s'hi perd temps. A les travessies 10 i 11 hi ha una oportunitat semblant: el grup pot enviar dues estrelles o una de sola.

Als qui creguin que ho han resolt en nou travessies, els diria que, en tots els casos, s'equivoquen. Cap entrenador desconfiat, en aquestes circumstàncies, no enviaria la seva estrella a l'altra riba amb un entrenador o més, encara que ella li assegurés que tornaria al viatge següent. Si el lector té en compte aquest detall, descobrirà de seguida el seu error.

Nota del matemàtic

Un problema amb molta història. La primera versió coneguda és d'Alcuí de York, al segle VIII, amb tres parelles i una barca de dues places, al mateix recull que «Travessant el rierol». Al segle XVI, Tartaglia en va donar una solució poc clara per a quatre parelles, i Bachet, el 1612, va advertir que amb quatre parelles i una barca de dues places no es pot fer, tot i que no ho va demostrar.

Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada per totes les situacions possibles (qui és a cada riba i on és la barca) confirma els tres nombres de Dudeney: sense la regla n'hi ha prou amb 9 travessies; amb la regla, el mínim és 11, i la seva solució és vàlida pas a pas. Si es compta qui va a cada travessia, hi ha més de 700 000 maneres de fer-ho en 11 travessies.

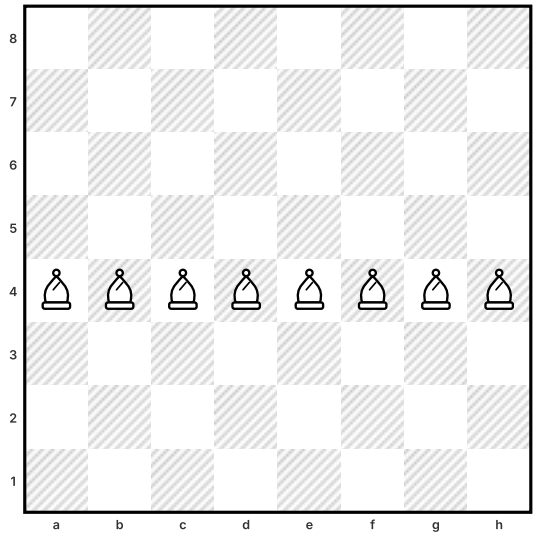
Quantes parelles hi caben? La mateixa cerca diu que amb una barca de dues places es poden passar dues o tres parelles, però quatre ja no; i amb una barca de tres places, fins a cinc parelles, però sis ja no. Amb una barca de quatre places, la cerca les passa totes, almenys fins a vuit parelles. Bachet tenia raó, doncs, i Dudeney va triar cinc parelles perquè és el màxim que funciona amb tres places.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Alfils sense protecció

La solució de Dudeney

No es pot fer amb menys de vuit alfils, i la solució més senzilla és posar-los en fila a la quarta o a la cinquena fila del tauler (mira la figura). Però fixa’t que aquí cap alfil no està protegit per cap altre: és el que estudiarem en el problema següent.



Nota del matemàtic

Dos problemes en un. Les caselles blanques i les negres no es toquen mai en diagonal, i per tant els alfils blancs i els negres no s’ajuden gens. Cal cobrir les 32 blanques amb alfils blancs i les 32 negres amb alfils negres.

Comprovat per ordinador. Una cerca de totes les maneres de posar alfils en caselles d’un color confirma que amb tres no es poden cobrir mai les 32 caselles d’aquell color, i que amb quatre sí: hi ha 108 maneres de fer-ho en les blanques i 108 en les negres. Per tant, el mínim és $4 + 4 = 8$, i hi ha $108 \cdot 108 = 11\,664$ maneres de cobrir el tauler amb vuit alfils.

En qualsevol tauler. En un tauler de $n \times n$ caselles calen sempre exactament n alfils: n’hi ha prou posant-los en una fila del mig, com fa Dudeney, i no es pot fer amb menys.

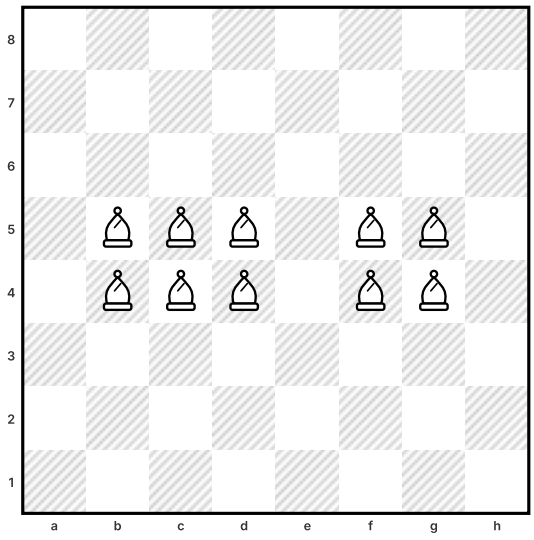
Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Alfils protegits

La solució de Dudeney

Aquest trencaclosques és força fàcil si primer t’hi pares a pensar una mica. Només cal considerar les caselles d’un color, perquè el que es pugui fer amb les blanques sempre es pot repetir amb les negres, i aquí són del tot independents. Aquesta igualtat és conseqüència, és clar, que el nombre de caselles d’un tauler d’escacs, seixanta-quatre, és parell. Si un tauler quadrat té un nombre senar de caselles, sempre n’hi haurà una més d’un color que de l’altre.

Calen deu alfils perquè totes les caselles quedin atacades i cada alfil estigui protegit per un altre. A la figura hi ha una manera de posar-los. Fixa’t que els dos alfils centrals del grup de sis de l’esquerra no serveixen per a res més que per protegir els alfils de les caselles del costat. Per tant, es pot obtenir una altra solució pujant el de dalt una casella i baixant l’altre una casella.



Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Una cerca de totes les maneres de posar alfils en caselles d’un color confirma que amb quatre no es pot fer (cobrir-les totes i que cada alfil estigui protegit) i que amb cinc sí, de 104 maneres per a cada color. El mínim és, doncs, 5 + 5 = 10. La figura de Dudeney i la seva variant (amb els dos alfils centrals moguts) també s’han comprovat.

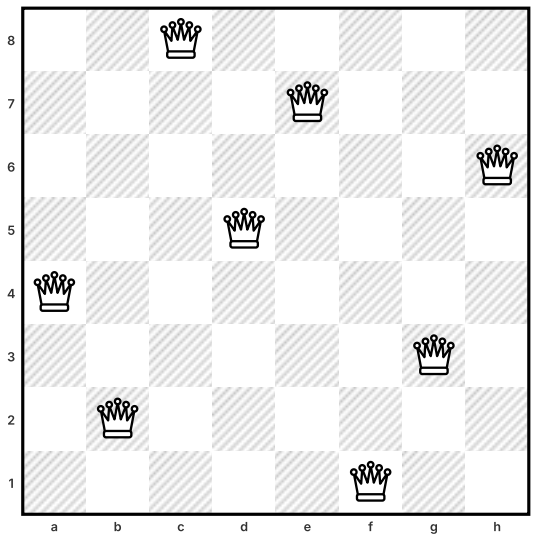
Per què protegir costa més. Un alfil sol no es pot protegir a si mateix: cada alfil necessita un company en una de les seves diagonals. Per això els alfils protegits tendeixen a anar en parelles o en grups, i acaben calent-ne més. En taulers grans, el nombre d’alfils protegits que calen és aproximadament un terç més gran que el d’alfils sense protegir.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Les vuit reines

La solució de Dudeney

La solució es veu a la figura. Cap reina no n’ataca cap altra, i no n’hi ha mai tres en línia recta en cap direcció obliqua. És l’única de les dotze maneres fonamentalment diferents de posar vuit reines sense que s’ataquin que també compleix aquesta darrera condició.



Nota del matemàtic

Història. El problema de les vuit reines el va proposar el jugador d’escacs Max Bezzel el 1848, i Franz Nauck en va publicar les 92 solucions el 1850; fins i tot Gauss s’hi va interessar. Avui és el problema clàssic per aprendre la cerca amb retrocés (*backtracking*): es posa una reina a cada fila i, quan ja no n’hi cap cap més, es torna enrere.

Comprovat per ordinador. La cerca troba les 92 solucions. Agrupades per girs i reflexos, en surten 12 de fonamentals: 11 amb 8 variants cadascuna i la simètrica, amb només 4 ($11 \cdot 8 + 4 = 92$). De les 92, només 8 no tenen cap trio de reines en línia, i totes són la mateixa solució fonamental: la de Dudeney.

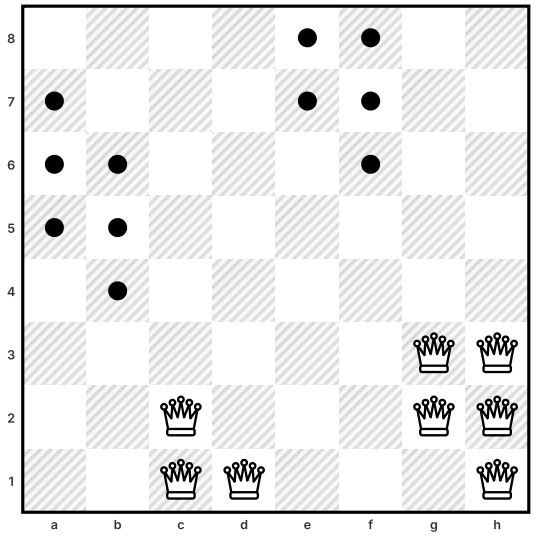
Tres en línia. Tres caselles són en línia recta quan els salts de l’una a l’altra són proporcionals: de la fila 1, columna 1 a la fila 3, columna 2, i a la fila 5, columna 3, per exemple. El mateix Dudeney va plantejar el 1917 la versió general amb peons: quants punts es poden posar en una quadrícula $n \times n$ sense que n’hi hagi tres en línia? És el problema «cap tres en línia» (*no-three-in-line*), i per a quadrícules grans encara és obert.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Les amazones

La solució de Dudeney

Es veurà que només s’han tret tres reines de les seves posicions a la vora del tauler i que, com a conseqüència, queden onze caselles (les dels punts negres) que no ataca cap reina.



M’atreveixo a afirmar que no es poden posar vuit reines al tauler de manera que deixin més d’onze caselles sense atacar. És cert que encara no en tenim cap demostració rigorosa, però n’estic del tot convençut. Hi ha almenys cinc maneres diferents de col·locar les reines que deixen onze caselles sense atacar.

Nota del matemàtic

⚠ **Dudeney tenia raó… i n’hi ha set, no cinc.** Un programa ha provat totes les maneres de posar vuit reines al tauler (4 426 165 368) i cap no deixa més d’onze caselles sense atacar: la conjectura de Dudeney és certa. Les que en deixen onze són 48, que es redueixen a **7** de fonamentalment diferents si no comptem els girs i els reflexos. Tant si les reines ataquen a través d’altres peces com si no, els resultats són els mateixos.

Comprovat per ordinador. Partint de la figura, s’han provat totes les maneres de canviar de lloc exactament tres reines (triar-ne tres de les vuit i posar-les en tres caselles noves): només una deixa onze caselles sense atacar, la de Dudeney, i cap no en deixa més.

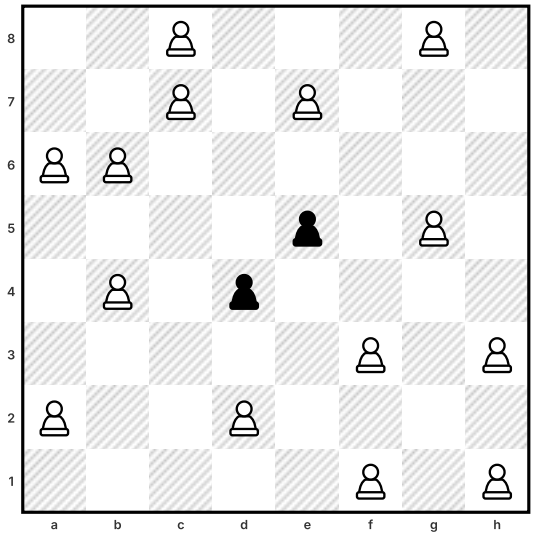
El problema contrari. Quantes reines calen, com a mínim, perquè *totes* les caselles quedin atacades o ocupades? En un tauler d’escacs, cinc. Aquests problemes de «dominar» un tauler són avui un capítol de la teoria de grafs.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Peons sense tres en línia

La solució de Dudeney

Es poden posar setze peons de manera que no n’hi hagi mai tres en línia recta en cap direcció possible, com a la figura. Hem considerat, com demanava l’enunciat, que els peons són simples punts d’un pla.



Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Una cerca de totes les maneres de posar setze peons en el tauler (dos a cada fila) sense tres en línia en dóna 380, que són 57 de fonamentalment diferents si no comptem els girs i els reflexos. Però només dues tenen peons a d4 i a e5: la de Dudeney i la mateixa girada mitja volta (que intercanvia d4 i e5). Amb els dos peons de l’enunciat, doncs, la solució és única.

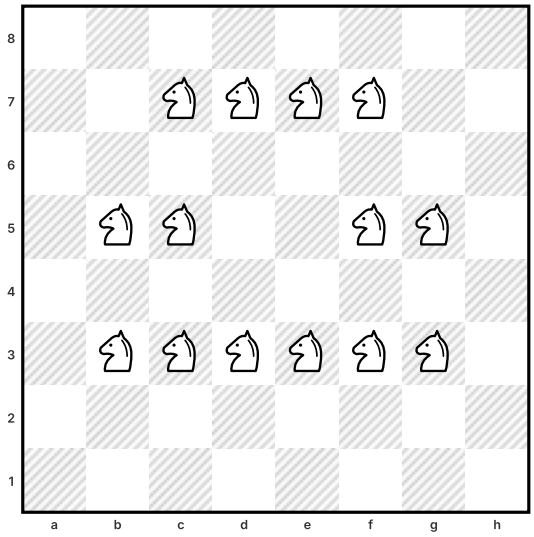
Un problema encara obert. Aquest enigma, que Dudeney va publicar per primera vegada el 1900, és avui el famós *problema de no tres en línia*: en una quadrícula de $n \times n$ punts, se’n poden triar $2n$ sense que n’hi hagi tres en línia? Per ordinador s’han trobat solucions per a tots els valors de n fins a 46 i per a alguns de més grans, però ningú no sap si es pot fer sempre. Richard Guy i Patrick Kelly van conjecturar el 1968 que, per a quadrícules prou grans, no: n’hi caben menys de $2n$.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Els cavalls guardians

La solució de Dudeney

El nombre més petit de cavalls amb què es pot resoldre aquest trencaclosques és catorze.



De vegades s'ha suposat que hi ha moltíssimes solucions diferents. En realitat només n'hi ha tres, sense comptar com a diferents els girs i els reflexos. Curiosament, sembla que ningú no havia trobat mai aquesta demostració tan senzilla, ni havia pensat a tractar per separat les caselles blanques i les negres.

Set cavalls es poden posar en caselles blanques de manera que ataquin totes les negres de dues maneres i prou. Tres dels cavalls ocupen el mateix lloc en totes dues. Si girem el tauler perquè la casella del racó de dalt a l'esquerra sigui negra en lloc de blanca i posem els cavalls exactament als mateixos llocs, tindrem dues maneres semblants d'atacar totes les blanques. Ara, dibuixem aquestes dues últimes en paper transparent i posem-les a sobre de les dues primeres: superposant-les de totes les maneres possibles només s'obtenen tres solucions (com la de la figura), o els seus girs i reflexos. Per tant, aquestes tres solucions són totes les que hi ha.

Nota del matemàtic

La idea dels dos colors. Un cavall sempre salta a una casella de l'altre color. Per tant, les caselles negres només les poden atacar (o protegir) els cavalls que són en caselles blanques, i al revés. El problema es parteix en dos problemes independents, un per a cada color, i el mínim total és la suma dels dos mínims: 7 + 7 = 14.

Comprovat per ordinador. Una cerca exhaustiva confirma que calen 7 cavalls en caselles blanques per atacar totes les negres, i que hi ha exactament 4 maneres de fer-ho (2, si comptem com una sola les que són simètriques); el mateix passa amb l'altre color. Combinant-les surten 16 solucions de 14 cavalls, que es redueixen a 3 de fonamentalment diferents, tal com diu Dudeney. També hem comprovat la figura de 12 cavalls: cobreix tot el tauler i només 4 cavalls hi estan protegits.

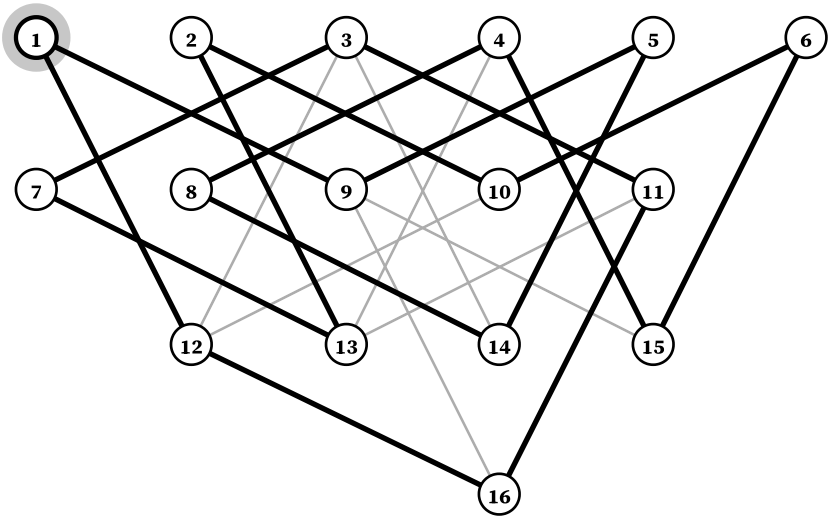
En el llenguatge d'avui, és un problema de *dominació* en un graf (el graf del cavall, on cada casella està unida a les que ataca): els 12 cavalls són un conjunt dominant mínim, i els 14, un conjunt dominant *total* mínim, on fins i tot cada vèrtex del conjunt ha de tenir un veí dins del conjunt.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Visitant les ciutats

La solució de Dudeney

Fixa’t que hi ha sis ciutats de les quals només surten dues carreteres. Per tant, l’1 ha de quedar entre la 9 i la 12 en la ruta circular: marquem aquestes dues carreteres com a segures. De la mateixa manera, marquem 9, 5, 14; 4, 8, 14; 10, 6, 15; 10, 2, 13, i 3, 7, 13. Totes aquestes carreteres s’han de fer servir.



Llavors veuràs que ha d’anar de la 4 a la 15, perquè la 13 ja està tancada, i que està obligat a fer 3, 11, 16 i també 16, 12. Per tant, només hi ha una ruta: 1, 9, 5, 14, 8, 4, 15, 6, 10, 2, 13, 7, 3, 11, 16, 12, 1, o la mateixa al revés. Set carreteres no es fan servir.

Nota del matemàtic

Un cicle de Hamilton. Un camí que passa una sola vegada per cada punt d’un mapa i torna a l’inici s’anomena *cicle de Hamilton*, pel matemàtic irlandès William Rowan Hamilton, que el 1857 va inventar un joc que consistia a fer-ne un sobre els vèrtexs d’un dodecàedre. A diferència dels recorreguts que passen per totes les *línies* (com el de «L’inspector del metro»), no es coneix cap regla senzilla per saber si un mapa té un cicle de Hamilton: en mapes grans, és un dels problemes més difícils de la informàtica.

El raonament de Dudeney és el que fan avui els programes: començar per les decisions obligades (les ciutats amb només dues carreteres) i deduir-ne la resta.

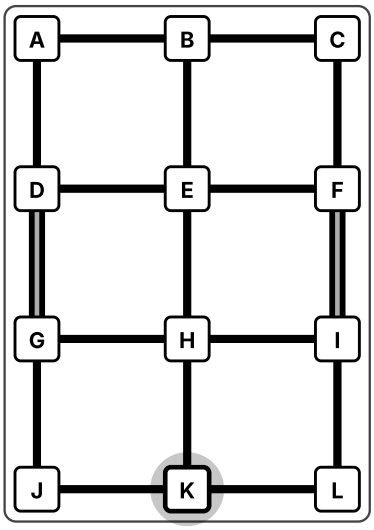
Comprovat per ordinador. Una cerca de totes les rutes que surten de l’1 confirma que només n’hi ha una (si comptem la mateixa ruta al revés com una sola) i que deixa set de les vint-i-tres carreteres sense fer servir.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

L’inspector del metro

La solució de Dudeney

L’inspector només ha de viatjar dinou quilòmetres si surt de B i fa aquesta ruta: B, A, D, G, D, E, F, I, F, C, B, E, H, K, L, I, H, G, J, K. Així, els únics trams que recorre dues vegades són els de D a G i de F a I. És clar que la ruta es pot variar, però no es pot escurçar.



Els trams D–G i F–I es fan dues vegades.

Nota del matemàtic

Per què 19. Un recorregut d’un sol traç, sense repetir cap línia, només és possible si de cada estació en surt un nombre parell de línies, llevat potser de dues, que han de ser la sortida i l’arribada: cada vegada que el recorregut passa per una estació, hi entra per una línia i en surt per una altra. Ho va demostrar Leonhard Euler el 1736, amb el problema dels set ponts de Königsberg. Aquí n’hi ha sis de senars: B, D, F, G, I i K. Dues poden ser la sortida i l’arribada; per a les altres quatre cal repetir línies, i repetir D–G i F–I (un quilòmetre cada una) les deixa totes parelles: 17 + 2 = 19.

El carter xinès. Trobar el recorregut més curt que passa per totes les línies d’un mapa s’anomena avui el *problema del carter xinès*, perquè el va estudiar el matemàtic xinès Guan Meigu el 1960, pensant en els carters que han de fer tots els carrers d’un barri. Dudeney ja el plantejava el 1917.

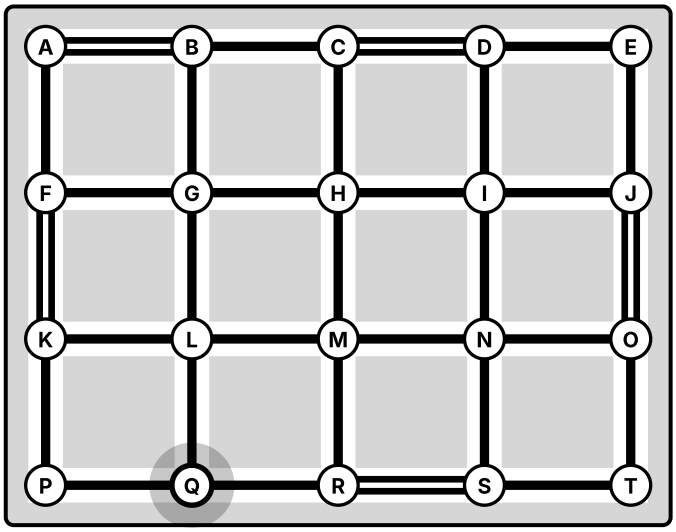
Comprovat per ordinador. Una cerca en amplada que té en compte a quina estació és l’inspector i quines línies ja ha revisat confirma que 19 quilòmetres és el mínim, i que la ruta de Dudeney és vàlida.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Inspeccionant una mina

La solució de Dudeney

Si surt de la A, l’inspector només ha de caminar 3600 metres si fa la ruta següent: de la A a la B, G, H, C, D, I, H, M, N, I, J, O, N, S, R, M, L, G, F, K, L, Q, R, S, T, O, J, E, D, C, B, A, F, K, P, Q.



Les galeries A–B, C–D, F–K, J–O i R–S es fan dues vegades.

Així, passa dues vegades entre la A i la B, entre la C i la D, entre la F i la K, entre la J i l’O i entre la R i la S: cinc repeticions. Per tant, 31 galeries més 5 de repetides fan 36 galeries: 3600 metres. El petit parany d’aquest trencaclosques és que comencem en una cruïlla d’on surt un nombre parell de galeries. Si no, n’hi hauria prou amb 3500 metres.

Nota del matemàtic

Per què 36. Com a «L’inspector del metro», cada vegada que la ruta passa per una cruïlla hi entra per una galeria i en surt per una altra. Per això, a cada cruïlla, el nombre de vegades que es recorren les seves galeries ha de ser parell, llevat de la sortida i l’arribada. Hi ha deu cruïlles «senars» (amb tres galeries). Si la sortida fos una d’elles, l’arribada en podria ser una altra, i les vuit que queden s’arreglarien repetint quatre galeries que n’uneixin dues: 31 + 4 = 35. Però la A és una cruïlla «parell»: si l’inspector hi surt, la A passa a necessitar una galeria repetida, i en total n’hi ha cinc. 31 + 5 = 36.

Comprovat per ordinador. Un programa que calcula la manera més curta d’aparellar les cruïlles senars (el mètode del problema del carter xinès) confirma que, sortint de la A, el mínim és 3600 metres, i que si l’inspector pogués sortir d’on volgués, en serien 3500. La ruta de Dudeney recorre totes les galeries i fa exactament 3600 metres.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

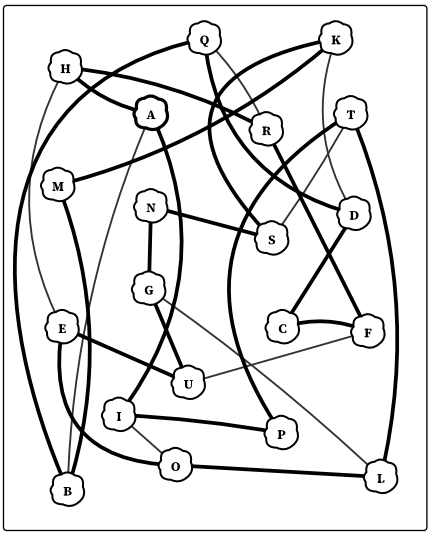
El trencaclosques del mariner

La solució de Dudeney

Només hi ha quatre rutes diferents (o vuit, si comptem les mateixes fetes al revés) per les quals el mariner pot sortir de l'illa A, visitar totes les illes una vegada, i només una, i tornar a la A. Són aquestes:

1. A I P T L O E H R Q D C F U G N S K M B A
2. A I P T S N G L O E U F C D K M B Q R H A
3. A B M K S N G L T P I O E U F C D Q R H A
4. A I P T L O E U G N S K M B Q D C F R H A

Si el mariner fa la primera ruta, la C serà la 12a illa (comptant la A com la 1a); amb la segona, la 13a; amb la tercera, la 16a, i amb la quarta, la 17a. Si les fa al revés, la C serà, respectivament, la 10a, la 9a, la 6a i la 5a. Com que aquestes són les úniques rutes possibles, és evident que, si el mariner deixa la C per al més tard possible, ha de fer l'última ruta, llegida d'esquerra a dreta. És la ruta que es veu marcada a la figura, i és la resposta correcta del trencaclosques.



El mapa es pot simplificar molt amb el mètode dels «botons i fils» que explico a la solució de «Les quatre granotes».

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Hem reconstruït el mapa amb les vint illes i les vint-i-vuit rutes del dibuix de Dudeney. Una cerca de totes les rutes que surten de la A i hi tornen confirma que n'hi ha exactament quatre (sense comptar-les al revés), i que la C hi queda als llocs 12, 13, 16 i 17 (o 10, 9, 6 i 5, al revés). Com a prova de la reconstrucció: les quatre rutes de Dudeney, juntes, fan servir justament les vint-i-vuit rutes del mapa, cap més i cap menys.

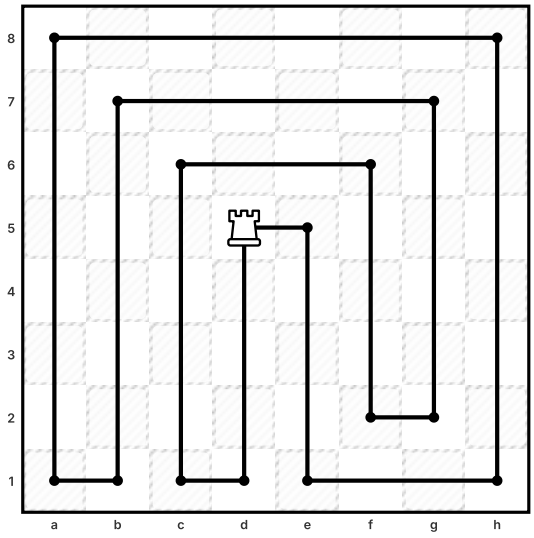
Un altre cicle de Hamilton. Com a «Visitant les ciutats», la ruta del mariner és un *cicle de Hamilton*: passa una sola vegada per cada punt del mapa i torna a l'inici. I el truc per trobar-les totes és el mateix: començar per les illes de les quals només surten dues rutes, que obliguen la ruta a passar-hi d'una manera determinada.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

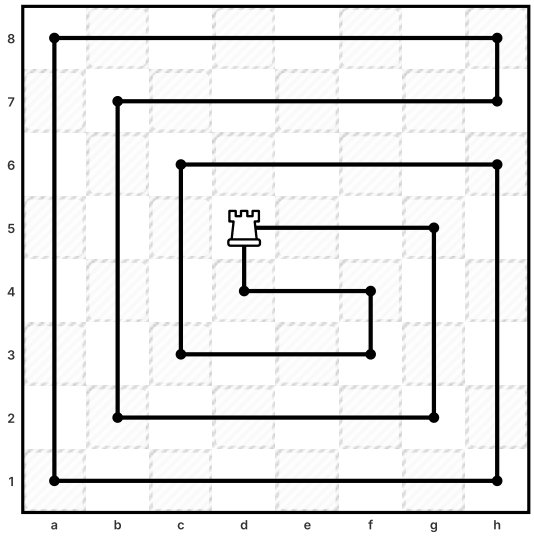
La volta de la torre

La solució de Dudeney

Les úniques solucions mínimes possibles són les de les dues figures: només calen setze jugades per fer la proesa. La majoria de la gent troba difícil baixar de disset.



La primera solució de Dudeney



La segona solució de Dudeney

Nota del matemàtic

Per què, com a mínim, 10. Una jugada de torre visita, com a molt, set caselles noves, i n’hi ha 63 per visitar a més de d5: calen almenys 9 jugades, i una més per tornar. I com que les jugades alternen entre horitzontals i verticals i el recorregut és tancat, n’hi ha d’haver un nombre parell. Aquest raonament no arriba a 16: la resta l’ha de fer l’ordinador.

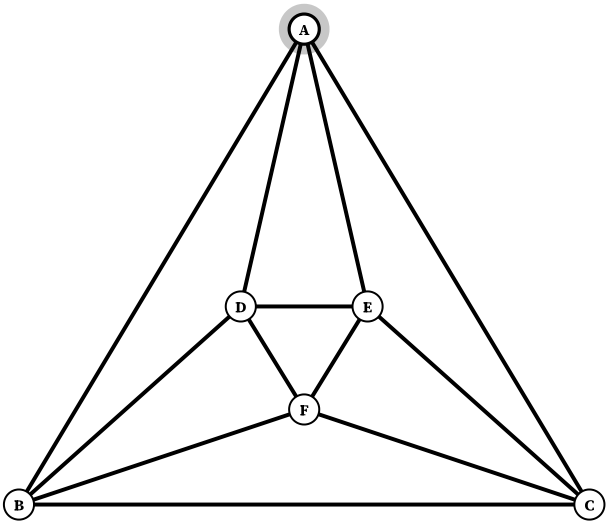
Comprovat per ordinador. Una cerca exhaustiva de tots els recorreguts que surten de d5 confirma que no n’hi ha cap de 10, 12 o 14 jugades. De 16 jugades n’hi ha 8 (16 si es compta el sentit en què es fan) i, si no es distingeixen els que són el mateix dibuix girat o vist en un mirall, només en queden 2: justament les dues figures de Dudeney. La seva afirmació és correcta.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

La mosca a l’octàedre

La solució de Dudeney

Tot i que no podem veure totes les cares de l’octàedre alhora, en podem fer una projecció que ens serveix igual de bé. A la figura, els sis punts representen els sis vèrtexs de l’octàedre, i de cada punt surten quatre línies exactament en les mateixes condicions que les dotze arestes del sòlid. Per tant, si sortim del punt A i passem una vegada per cada línia, sempre acabarem la ruta a la A.



Una de les 1488 rutes.

I el nombre de rutes diferents és exactament 1488, comptant com a diferent la mateixa ruta feta al revés. Explicar com faig el recompte ocuparia massa espai. Es pot fer en uns cinc minuts, però el mètode és difícil d’explicar, i per això demano al lector que accepti la meva resposta com a correcta.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Un programa que prova totes les rutes que surten de la A sense repetir cap aresta en troba exactament 1488 que les recorren totes. Dudeney tenia raó, i també en el detall: totes acaben a la A. Per simetria, 1488 = 4 × 372: les rutes que surten per cadascuna de les quatre arestes de la A.

Euler, una altra vegada. Una ruta així s’anomena *circuit d’Euler*. Que existeixi és fàcil de saber (com a «L’inspector del metro»: tots els vèrtexs han de tenir un nombre parell d’arestes), però *comptar-los* és una altra cosa. Per als grafs dirigits hi ha una fórmula (el teorema BEST), però per als no dirigits, com aquest, G. Brightwell i P. Winkler van demostrar el 2004 que és un problema computacionalment molt difícil (#P-complet). Dudeney diu que ell ho comptava en cinc minuts: no sabem com ho feia.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

El vuit rebel

La solució de Dudeney

Les condicions eren posar un nombre diferent a cadascuna de les nou caselles de manera que les tres files, les tres columnes i les dues diagonals sumessin 15. Probablement el lector s'ha imposat una tasca impossible perquè ha llegit en les condicions una cosa que no hi era, un error ben freqüent quan es resolen trencaclosques.

$4\frac{1}{2}$	8	$2\frac{1}{2}$
3	5	7
$7\frac{1}{2}$	2	$5\frac{1}{2}$

Si hagués dit «una xifra diferent» en lloc d'«un nombre diferent», hauria estat ben impossible amb el 8 en un lloc que no fos un racó. I també ho hauria estat si hagués dit «un nombre enter diferent». Però un nombre, és clar, pot ser fraccionari, i aquí hi ha el secret del trencaclosques. La disposició de la figura compleix exactament les condicions: tots els nombres són diferents, i el quadrat suma 15 de les vuit maneres demanades.

Nota del matemàtic

Per què el centre ha de ser 5. La fila del mig, la columna del mig i les dues diagonals passen totes pel centre. Si les sumem, surt $4 \cdot 15 = 60$, i hi hem comptat totes les caselles una vegada i el centre tres vegades més: $45 + 3 \cdot \text{centre} = 60$. Per tant, el centre és 5.

Totes les solucions. Amb el 5 al centre i el 8 a dalt, a baix hi ha d'anar un 2. Si a la cantonada de dalt a l'esquerra hi posem un nombre a, la resta del quadrat queda decidida:

a	8	$7 - a$
$12 - 2a$	5	$2a - 2$
$3 + a$	2	$10 - a$

Amb $a = 4½$ surt la solució de Dudeney. Amb nombres enters positius, a hauria de ser 2, 3, 4 o 5, i sempre se'n repeteix algun: per això Dudeney diu que amb enters és impossible.

⚠ **Un detall que se li va escapar.** Amb $a = 6$ surt 6, 8, 1 / 0, 5, 10 / 9, 2, 4: nou nombres enters, tots diferents, i totes les línies sumen 15… però hi ha el 0 i el 10. Si el 0 compta com a nombre enter (i avui hi compta), el vuit rebel també té solució sense fraccions. Dudeney segurament pensava en nombres positius. Amb $a = 1$ surt el mateix quadrat, com vist en un mirall.

Al tauler s'accepta qualsevol solució correcta, també amb altres fraccions (amb $a = 1½$, per exemple) o amb nombres negatius. I una curiositat: el quadrat màgic amb els nombres de l'1 al 9 és únic, llevat de

girs i reflexos; a la Xina es coneix des de fa més de dos mil anys, amb el nom de *Lo Shu*.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

El quadrat de Bachet

La solució de Dudeney

Fem servir A, K, Q, J per a l'as, el rei, la dama i el valet, i ♦, ♠, ♥, ♣ per als diamants, les piques, els cors i els trèvols. Als diagrames 1 i 2 hi ha les dues maneres possibles d'ordenar cada grup de manera que no n'hi hagi dos d'iguals en línia (tot i que un quart de volta del diagrama 1 dona la disposició del 2). Si superposem aquests dos quadrats, obtenim la disposició del diagrama 3, que és una solució.

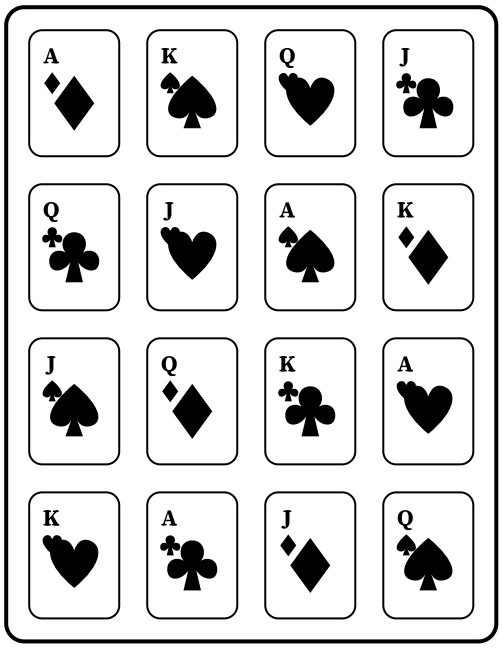
1

A	K	Q	J
Q	J	A	K
J	Q	K	A
K	A	J	Q

2

♦	♠	♥	♣
♣	♥	♠	♦
♠	♦	♣	♥
♥	♣	♦	♠

3



Però en cada quadrat podem posar els símbols de la fila de dalt de vint-i-quatre maneres diferents sense alterar l'esquema: per exemple, posant les piques on hi havia els diamants, els cors on hi havia les piques, els trèvols on hi havia els cors i els diamants on hi havia els trèvols. És clar, doncs, que hi ha d'haver 24 × 24 = 576 maneres de combinar els dos esquemes primitius. L'error de Labosne va ser suposar que els valors s'havien de col·locar en la forma 1 i els pals en la forma 2: així hi comptava els reflexos i les mitges voltes, però no els quarts de volta. És evident que es poden intercanviar. Per tant, la resposta correcta és 2 × 576 = 1.152, comptant com a diferents els reflexos i els girs.

Dit d'una altra manera: les parelles de la fila de dalt es poden escriure de 16 × 9 × 4 × 1 = 576 maneres diferents, i després el quadrat es pot completar de 2 maneres: 1.152 en total.

Nota del matemàtic

Quadrats grecollatins. Un quadrat en què cada símbol surt una vegada a cada fila i a cada columna s'anomena *quadrat llatí*. Aquí els valors formen un quadrat llatí, i els pals, un altre; i com que cada parella valor–pal hi surt exactament una vegada, junts formen un *quadrat grecollatí*. Leonhard Euler els va estudiar el 1782 amb el problema dels 36 oficials (6 graus i 6 regiments): va dir que no n'hi ha cap de 6 × 6, i tenia raó (ho va demostrar Gaston Tarry el 1901). Però també pensava que no n'hi havia de 10 × 10, de 14 × 14…, i aquí s'equivocava: el 1959, Bose, Shrikhande i Parker van demostrar que n'hi ha de totes les mides, llevat de 2 i 6.

Comprovat per ordinador. Una cerca exhaustiva que va posant les cartes una per una, sense repetir pal ni valor en cap fila, columna o diagonal llarga, en troba exactament 1.152: Dudeney té raó, i Labosne, no. També hem comprovat el diagrama 3 de Dudeney.

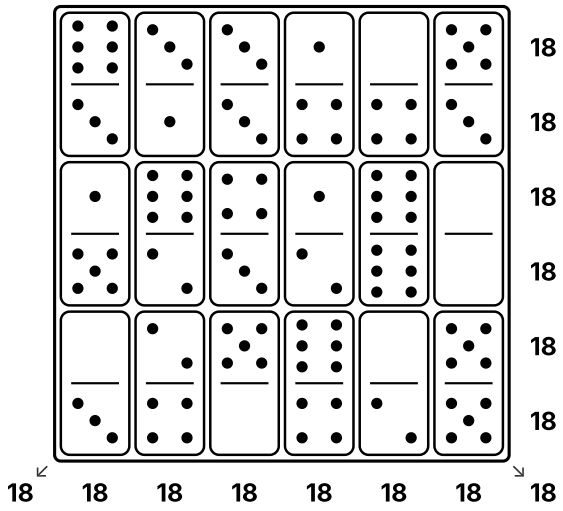
Avui, aquests quadrats serveixen, per exemple, per dissenyar experiments: provar quatre adobs en quatre varietats d'un cultiu sense que cap combinació es repeteixi en una mateixa fila o columna del camp.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Les divuit fitxes de dòmino

La solució de Dudeney

La il·lustració s’explica tota sola. Es veurà que els punts de cada columna, de cada fila i de cada diagonal llarga sumen 18, tal com es demanava.



Totes les files, les columnes i les dues diagonals sumen 18.

A la il·lustració de la solució, Dudeney posa les fitxes ajagudes; aquí és el mateix quadrat girat, amb les fitxes de peu com a l’enunciat. Les sumes no canvien.

Nota del matemàtic

Per què 13 és el mínim. Si totes les línies sumen S, les sis files juntes sumen $6S$: els punts de les divuit fitxes han de ser un múltiple de 6. Les divuit fitxes amb menys punts en sumen 76, i el primer múltiple de 6 que no és més petit que 76 és $78 = 6 \times 13$. I si es canvia cada nombre pel que li falta per arribar a 6, cada línia passa de sumar S a sumar $36 - S$, i les fitxes continuen sent totes diferents: per això el màxim és $36 - 13 = 23$.

Comprovat per ordinador. El quadrat de 13 de l’enunciat i el de 18 de la solució tenen divuit fitxes diferents i les catorze sumes correctes. No hem comptat quantes solucions de 18 hi ha.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Les cistelles de prunes

La solució de Dudeney

Com que el fruiter va dir al seu home que repartís el contingut d'una de les cistelles «entre uns quants nens», no s'hi valia donar la cistella sencera a un sol nen; i com que també li va dir que donés «prunes a cada nen, de manera que tots en rebessin el mateix nombre», tampoc no s'hi valia triar tants nens com prunes hi havia a la cistella i donar-ne una a cadascun. Per tant, si el nombre de prunes de cada cistella era un nombre primer, l'home tenia raó: el repartiment era impossible. El trencaclosques es redueix, doncs, a fer un quadrat màgic amb nou nombres primers diferents.

El diagrama A és un quadrat màgic de nombres primers, i és el que dona la suma constant més petita possible. Pel que fa al petit parany que deia, és clar que el diagrama A queda descartat per les paraules «a cada cistella hi havia prunes», perquè una pruna no són prunes. I com que se'ns remetia a les cistelles «com a la il·lustració», és evident, sense comptar-les, que a cada cistella hi ha com a mínim més de 7 prunes. Per tant, en sentit estricte, el C també queda descartat. Qualsevol quantitat de més de 20 i de menys de, posem, 250 seria ben possible, i hi ha moltes disposicions dins d'aquests límits. El diagrama B n'és una. És clar que també podem tenir en compte els dobles fons que fan servir tan sovint els fruiters a les cistelles perquè semblin més plenes del que són.

A

7	61	43
73	37	1
31	13	67

B

83	29	101
89	71	53
41	113	59

C

103	79	37
7	73	139
109	67	43

D

1669	199	1249
619	1039	1459
829	1879	409

Alguns lectors van suposar (no sé per què) que en aquest problema els nombres no podien anar en progressió aritmètica, i per això dono el diagrama D, per mostrar que s'equivocaven. Els nombres són 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669 i 1879, tots primers, amb una diferència de 210.

Nota del matemàtic

⚠ **L'1 no és primer.** Dudeney diu que el diagrama A és «un quadrat de nombres primers», però avui no comptem l'1 entre els primers: si el comptéssim, la descomposició en factors primers no seria única (6

= 2 · 3 = 1 · 2 · 3…). En temps de Dudeney encara n'hi havia que el comptaven. El seu parany («una pruna no són prunes») el descarta igualment.

Comprovat per ordinador. Els quatre diagrames són quadrats màgics, de constants 111, 213, 219 i 3117, i tots els nombres són primers llevat de l'1 del diagrama A. Amb primers de veritat, la constant més petita és 177 (17, 89, 71; 113, 59, 5; 47, 29, 101), i si a més totes les cistelles han de tenir més de 7 prunes, és 213: el diagrama B de Dudeney és el més petit que compleix totes les seves condicions.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Un quadrat màgic de compostos

La solució de Dudeney

En realitat, el problema és trobar el primer més petit tal que el primer següent el superi com a mínim en 10. Si escrivim una petita llista de primers, no caldrà passar de 150 per trobar el que busquem, perquè després del 113 el primer següent és el 127. Llavors podem formar el quadrat de la figura, on tots els nombres són compostos. És la solució amb els nombres més petits.

121	114	119
116	118	120
117	122	115

Hi ha una manera de trobar una resposta (no la més petita) sense taules ni proves. Escriu nou nombres seguits, el més petit dels quals sigui més gran que 1: per exemple, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10. Els únics factors que hi ha en aquests nombres són el 2, el 3, el 5 i el 7. Els multipliquem, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, i sumem 210 a cadascun dels nou nombres: surten els nou compostos seguits del 212 al 220, amb els quals podem formar el quadrat. Cada nombre és divisible per la seva diferència amb 210. Així es poden trobar tants compostos seguits com es vulgui.

Però, com he dit, no són les respostes amb els nombres més petits: si sumem 523 als nombres de l’1 al 16, obtenim setze compostos seguits, i si sumem 1327 als nombres de l’1 al 25, vint-i-cinc, en tots dos casos els més petits possible. Fins i tot per trobar-ne trenta-sis seguits, buscaries a les taules fins a 10 000 sense èxit.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. El primer bloc de nou compostos seguits va del 114 al 122, i el quadrat de Dudeney és màgic (cada línia suma 354). Els altres rècords també són correctes: 16 compostos seguits comencen al 524 (entre els primers 523 i 541), 25 al 1328 (entre 1327 i 1361), i el primer bloc de 36 comença al 15 684, molt més enllà de 10 000.

Forats entre primers. El truc del 210 mostra que hi ha forats tan grans com vulguem entre primers seguits ($n! + 2$, $n! + 3$, …, $n! + n$ són tots compostos). Saber exactament com creixen aquests forats és, encara avui, un dels problemes oberts més coneguts de la teoria de nombres.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Un quadrat màgic reversible

La solució de Dudeney

Es veurà que, en aquesta disposició, tots els nombres són diferents, i totes les columnes, totes les files i les dues diagonals sumen 179, tant si gires la pàgina cap per avall com si no. El lector notarà que no he fet servir les xifres 3, 4, 5, 8 ni 0.

De cap

11	77	62	29
69	22	17	71
27	61	79	12
72	19	21	67

Cap per avall

29	17	61	72
71	62	19	27
12	21	77	69
67	79	22	11

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Els setze nombres són diferents i totes les línies sumen 179. Cap per avall, el quadrat es llegeix 29, 17, 61, 72; 71, 62, 19, 27; 12, 21, 77, 69; 67, 79, 22, 11, que també és màgic, amb la mateixa suma, i té exactament els mateixos setze nombres, col·locats d’una altra manera.

Xifres que es giren. Amb les xifres de rellotge digital (de set segments), el 6 i el 9 s’intercanvien i el 0, l’1, el 2, el 5 i el 8 es veuen igual girats; el 7 no dona cap xifra. El 7 ↔ 2 de Dudeney només funciona amb la seva lletra.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917). Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

El número estripat

La solució de Dudeney

L'altre número que compleix totes les condicions del trencaclosques és el 9801. Si el partim pel mig en dos nombres i els sumem, obtenim 99, que multiplicat per si mateix fa 9801. És veritat que el 2025 també funciona, però queda exclòs per la condició que no hi pot haver dues xifres iguals.

La solució general és curiosa. Diguem n al nombre de xifres de cada meitat de l'etiqueta. Si sumem 1 a cadascun dels exponents dels factors primers (llevat del 3) de $10^n - 1$ (considerant l'1 com un factor amb exponent 1), el producte d'aquests nombres és el nombre de solucions. Així, per a una etiqueta de sis xifres, $n = 3$. Els factors de $10^3 - 1$ són $1^1 \times 37^1$ (sense comptar el 3^3), i el producte $2 \times 2 = 4$ és el nombre de solucions. Sempre hi ha els casos especials 98–01 i 00–01, 998–001 i 000–001, etc.

Les solucions s'obtenen així. Es descompon $10^3 - 1$ de totes les maneres possibles, mantenint sempre juntes les potències de 3: 37×27 i 999×1. Després es resol l'equació $37x = 27y + 1$; aquí, $x = 19$ i $y = 26$. Per tant, $19 \times 37 = 703$, i el seu quadrat dona una etiqueta: 494 209. Una solució complementària (que surt de $27x = 37y + 1$) es troba de seguida fent $10^3 - 703 = 297$, el quadrat del qual dona l'etiqueta 088 209. Els zeros de l'esquerra s'han d'incloure, tot i que porten a casos curiosos com l'etiqueta 00238 04641, que és 4879^2, mentre que 0238 4641 no funcionaria.

El cas especial 999×1 dona de seguida 998 001, segons la llei d'abans (afegint nous a una meitat i zeros a l'altra), i el seu complementari és un 1 precedit de cinc zeros, 000 001. Així tenim els quadrats de 999 i d'1. Aquestes són les quatre solucions.

Nota del matemàtic

Nombres de Kaprekar. Unes quantes dècades més tard, el matemàtic indi D. R. Kaprekar (1905–1986) va estudiar la mateixa propietat mirada a l'inrevés: un nombre és *de Kaprekar* si el seu quadrat es pot partir en dues parts que tornen a sumar el nombre. El 45, el 55 i el 99 ho són, perquè $45^2 = 2025$ i $20 + 25 = 45$, $55^2 = 3025$ i $99^2 = 9801$. Les etiquetes de Dudeney són els quadrats dels nombres de Kaprekar quan el quadrat es parteix just pel mig.

Comprovat per ordinador. Provant totes les etiquetes de 0000 a 9999, només 0001, 2025, 3025 i 9801 compleixen (primera meitat + segona meitat)^2 = etiqueta, sense comptar el 0000; i només 3025 i 9801 tenen les quatre xifres diferents. Amb sis xifres surten exactament les quatre de Dudeney: 494 209, 088 209, 998 001 i 000 001.

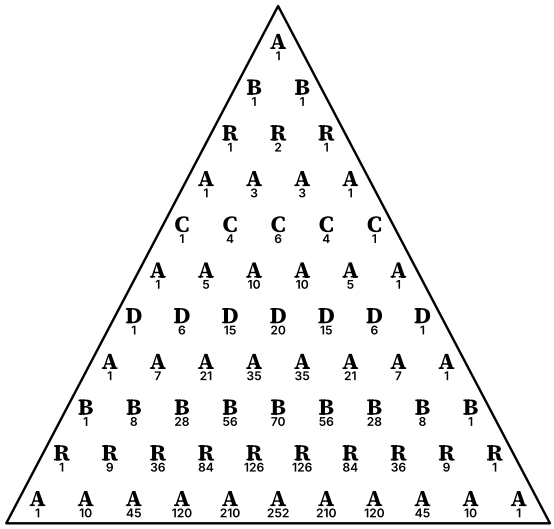
Un detall per a l'aula: el 2025, que Dudeney deixa de banda, també va ser un any curiós. $2025 = 45^2$ i $45 = 1 + 2 + \ldots + 9$; per tant, 2025 és igual a $1^3 + 2^3 + \ldots + 9^3$, la suma dels cubs de les xifres de l'1 al 9.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

L’amulet

La solució de Dudeney

—Ara, fixeu-vos-hi, bona gent —va dir Sir Hugh a uns quants que li havien demanat que ho expliqués—: ja de bon començament hi ha dos camins oberts. Trieu la B que trieu, hi haurà dues maneres de continuar (dues vegades dos fan quatre); trieu la R que trieu, hi haurà dues maneres de seguir (dues vegades quatre fan vuit), i així fins al final. A cada lletra, de la A cap avall, s’hi pot arribar de 2, 4, 8, 16, 32… maneres. Per tant, com que de la A fins a baix hi ha deu línies o passos en total, només heu de multiplicar deu 2 entre si, i el resultat, 1024, és la resposta que buscàveu.



Sota cada lletra, de quantes maneres s’hi arriba: és el triangle de Pascal. A la fila de baix: 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 1024.

Nota del matemàtic

El triangle de Pascal. Si escrius sota cada lletra de quantes maneres s’hi pot arribar, surt el triangle de Pascal: cada nombre és la suma dels dos que té a sobre. A la fila de baix hi ha 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10 i 1, que són els nombres combinatoris de 10, i sumen $2^{10} = 1024$. Comprovat per ordinador.

⚠ **Abracadabra no era cap déu assiri.** El primer text conegut que la fa servir és el *Liber medicinalis* del metge romà Quint Serè Samònic (cap a l’any 200), que recomana escriure-la en un amulet contra la febre, però en forma de triangle que s’escurça una lletra a cada fila, perquè la febre minvi com la paraula. L’origen de la paraula és desconegut.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Comptant els rectangles

La solució de Dudeney

En total hi ha 1296 rectangles diferents, 204 dels quals són quadrats (comptant com un d'ells el tauler sencer), i 1092 rectangles que no són quadrats.

La fórmula general és que un tauler de n^2 caselles conté $(n^2 + n)^2/4$ rectangles, dels quals $(2n^3 + 3n^2 + n)/6$ són quadrats i $(3n^4 + 2n^3 - 3n^2 - 2n)/12$ són rectangles que no són quadrats. És curiós i interessant que el nombre total de rectangles sempre és el quadrat del nombre triangular de costat n.

Nota del matemàtic

Per què és un quadrat. Un rectangle queda fixat per dues de les $n + 1$ línies verticals i dues de les $n + 1$ horitzontals. Triar dues línies d'entre nou es pot fer de 36 maneres ($1 + 2 + \ldots + 8$, el nombre triangular), i per això hi ha $36 \times 36 = 1296$ rectangles. Els quadrats són $1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2 = 204$.

Una igualtat preciosa. 1296 també és $1^3 + 2^3 + \ldots + 8^3$. No és casualitat: per a qualsevol n, $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$, és a dir, la suma dels cubs és el quadrat de la suma. És el teorema de Nicòmac, que ja era conegut cap a l'any 100. Per tant, el tauler de $n \times n$ té tants rectangles com la suma dels cubs d'1 a n.

Comprovat per ordinador. Comptant un per un tots els rectangles, en taulers d'1×1 a 12×12, les tres fórmules de Dudeney sempre encerten. Al text de Project Gutenberg s'han perdut els exponents de les fórmules (hi diu «n2»): els hem restituït.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

El problema del cent

La solució de Dudeney

El problema d’escriure 100 com a nombre mixt o fracció fent servir les nou xifres una vegada, i només una, té, com tots aquests trencaclosques de xifres, un costat fascinant. Qualsevol principiant, amb paciència, pot obtenir resultats correctes, i hi ha un plaer singular a descobrir i apuntar cada nova combinació, semblant al del botànic que troba una planta que buscava des de feia temps. Aquestes són les onze respostes, incloent-hi la que vaig donar d’exemple:

96 2148/537 · 96 1752/438 · 96 1428/357 · 94 1578/263 · 91 7524/836 · 91 5823/647 · 91 5742/638 · 82 3546/197 · 81 7524/396 · 81 5643/297 · **3 69258/714**

Com que totes les fraccions representen nombres enters, és pràctic escriure-les així: 96 + 4, 94 + 6, 91 + 9, 82 + 18, 81 + 19 i 3 + 97. Amb cada part entera, les arrels digitals de la fracció que la completa fins a 100 sempre tenen una forma concreta. Així, en el cas de 96 + 4, podem dir de seguida que, si hi ha cap resposta, les arrels del numerador i del denominador seran totes dues 6.

Tothom veurà que algunes parts enteres són clarament impossibles. Si la part entera té un 5, la fracció tindrà un zero o un segon 5. Els múltiples de 10, com 90 o 80, no poden sortir, i la part entera tampoc no pot acabar en 9, com 89 o 79, perquè la fracció valdria 11 o 21 i acabaria en 1, i repetiria una xifra. Tampoc no serveixen les parts enteres que repeteixen una xifra, com 88 o 77. I la part entera no pot anar de 12 a 23, perquè no hi ha denominadors prou petits per formar la fracció.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Un programa que prova les 362 880 maneres d’ordenar les nou xifres i totes les maneres de partir-les en part entera, numerador i denominador troba exactament les onze solucions de Dudeney: deu amb dues xifres a la part entera i una sola, 3 + 69258/714 = 3 + 97, amb una.

L’arrel digital. L’«arrel digital» d’un nombre és el que queda si en sumes les xifres, i després les xifres del resultat, fins que en queda una: 5742 → 18 → 9. És el residu de dividir el nombre per 9 (fent que un residu de 0 valgui 9), i per això dona una prova ràpida: com que 1 + 2 + … + 9 = 45, les arrels de les tres parts han de sumar un múltiple de 9. És la vella «prova del nou».

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Multiplicació amb les nou xifres

La solució de Dudeney

La solució que dona la suma de xifres més petita al producte comú és 23 × 174 = 58 × 69 = 4002, i la que dona la suma més gran, 9 × 654 = 18 × 327 = 5886. En el primer cas les xifres sumen 6, i en el segon, 27. No hi ha cap altra manera de trobar la solució que provar-ho.

Nota del matemàtic

⚠ **Dudeney s’equivoca en la segona.** 7 × 984 = 56 × 123 = 6888 fa servir les nou xifres una vegada, i la suma de les xifres del producte és 30, més que el 27 de Dudeney. La de 5886 és només la segona més alta.

Comprovat per ordinador. Hi ha 59 parells de multiplicacions que fan servir les nou xifres una vegada (amb 57 productes diferents). La suma de xifres més petita és 6, i només s’aconsegueix amb 4002; la més gran és 30, i només amb 6888.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d’obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Els cinc guanyadors

La solució de Dudeney

Els amics podien tenir els 200 € de qualsevol de 6627 maneres diferents. L'Anna podia tenir qualsevol quantitat de l'1 a l'11. Si en tenia 1, hi ha 1005 maneres diferents de repartir la resta; si en tenia 2, 985; si 3, 977; si 4, 903; si 5, 832; si 6, 704; si 7, 570; si 8, 388; si 9, 200; si 10, 60, i si en tenia 11, la resta es podia repartir de 3 maneres. Més d'11 euros no en podia tenir de cap manera.

No s'esperarà que doni les 6627 maneres una per una. Però per a cada quantitat de l'Anna, el nombre de respostes és la suma de dues progressions aritmètiques, una de diferència 1 i l'altra de diferència −4. Així, quan l'Anna té 6 euros, una progressió és 33 + 34 + 35 + … + 44 i l'altra, 42 + 38 + 34 + … + 6 + 2. La primera suma 462 i la segona 242, que fan les 704 respostes. Quan l'Anna té 9, 10 o 11 euros, només hi ha una progressió, de la segona mena.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Un programa que prova totes les possibilitats troba exactament 6627 repartiments, i el nombre per a cada quantitat de l'Anna coincideix un per un amb els de Dudeney, de 1005 a 3. Labosne s'equivocava per 12.

Dues equacions i cinc incògnites. Amb menys equacions que incògnites hi ha infinites solucions… si es permeten fraccions o nombres negatius. Demanar nombres enters positius, i que la meitat i el terç també ho siguin, en deixa un nombre finit, i comptar-les és el que avui en diríem un problema d'*equacions diofàntiques*.

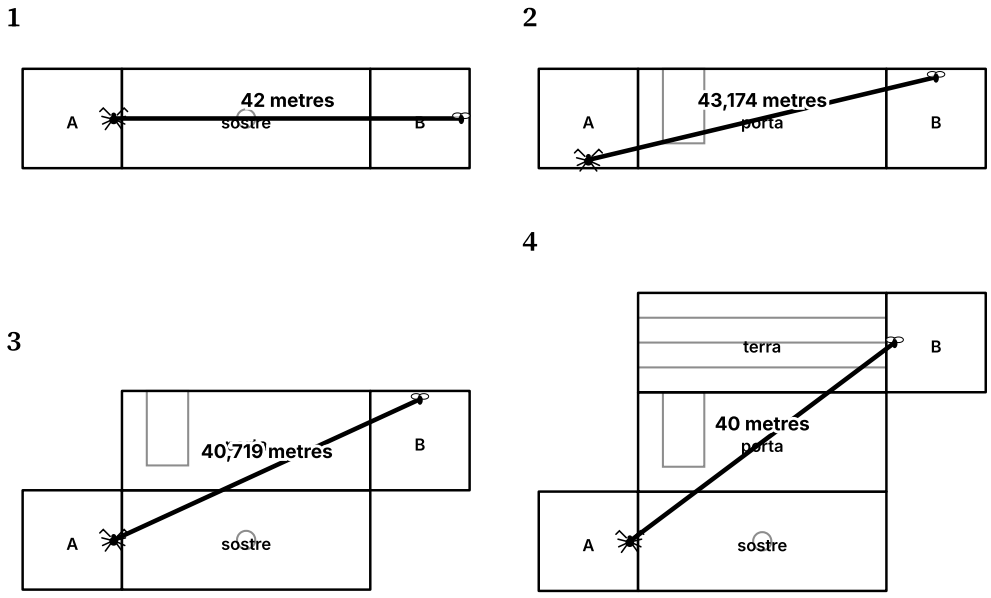
Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

L'aranya i la mosca

La solució de Dudeney

Tot i que aquest problema es va discutir molt al *Daily Mail* del 18 de gener al 7 de febrer de 1905, quan semblava que despertava un gran interès, en realitat el vaig proposar jo per primera vegada al *Weekly Dispatch* del 14 de juny de 1903.

Imagineu-vos que la sala és una capsa de cartró. La capsa es pot tallar de diverses maneres perquè el cartró quedi pla damunt la taula. N'ensenyo quatre, i en cada cas hi indico la posició de l'aranya i de la mosca i el camí recte que ha de fer l'aranya sense sortir del cartró. Són els quatre casos més favorables, i el camí més curt és el del número 4, perquè només fa 40 metres (suma el quadrat de 32 i el de 24 i fes-ne l'arrel quadrada). Fixa't que l'aranya passa per cinc de les sis cares de la sala!



Els quatre desplegaments de Dudeney: 42; 43,174; 40,718 i 40 metres.

Un cop marcat el camí, torna a plegar la capsa (traient-ne la cara que l'aranya no fa servir): l'aspecte del camí més curt és força sorprenent. Si l'aranya hagués pres el que la majoria de la gent consideraria, evidentment, el camí més curt (el del número 1), hauria recorregut 42 metres! El camí número 2 fa 43,174 metres, i el número 3, 40,718 metres.

Deixo que el lector descobreixi quins són els camins més curts quan l'aranya i la mosca són a 2, 3, 4, 5 i 6 metres del sostre i del terra, respectivament.

Nota del matemàtic

Per què 40. Al desplegament del número 4, el camí és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets 24 i 32: $\sqrt{(24^2 + 32^2)} = \sqrt{(576 + 1024)} = \sqrt{1600} = 40$ metres, un nombre exacte. La recta passa pel sostre, una paret llarga i el terra, de biaix, i en plegar la capsa sembla una ziga-zaga.

Comprovat per ordinador. Hem provat totes les maneres d'anar de la paret de l'aranya a la de la mosca sense repetir cap cara, hem desplegat la capsa per a cadascuna i hem comprovat que la recta no surt del cartró. El mínim és 40 metres, i també surten els altres camins de Dudeney: 42, 43,174 ($\sqrt{1864}$) i el del número 3, que fa $\sqrt{1658} = 40{,}7185\ldots$; Dudeney escriu 40,718, tallant els decimals, i arrodonit seria 40,719.

El repte final de Dudeney. Si l'aranya i la mosca són a 2 metres del sostre i del terra, el camí més curt fa $\sqrt{1700} \approx 41{,}23$ metres (pel sostre i una paret llarga); a 3 metres, $\sqrt{1746} \approx 41{,}79$; i a partir de 4 metres

guanya el camí «evident» pel sostre, que sempre fa 42 metres.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Nombres curiosos

La solució de Dudeney

Els tres nombres més petits, a més del 48, són 1680, 57 120 i 1 940 448. Es pot veure que 1681 i 841, 57 121 i 28 561, i 1 940 449 i 970 225 són, respectivament, els quadrats de 41 i 29, de 239 i 169, i de 1393 i 985.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Provant tots els nombres fins a dos milions, només el 48, el 1680, el 57 120 i el 1 940 448 tenen la particularitat. El següent és el 65 918 160.

Una equació de Pell. Si $n + 1 = a^2$ i $n/2 + 1 = b^2$, llavors $a^2 - 2b^2 = -1$. Totes les solucions surten de la primera, (1, 1), amb la regla $(a, b) \to (3a + 4b, 2a + 3b)$: (7, 5), (41, 29), (239, 169), (1393, 985)... Per això no s'acaben mai.

I √2. Com que a^2 és gairebé $2b^2$, les fraccions a/b s'acosten molt a √2: 41/29 = 1,4138..., 239/169 = 1,41420... i 1393/985 = 1,414213..., mentre que √2 = 1,4142135... Els matemàtics de l'antiga Grècia ja coneixien aquests parells de nombres, que anomenaven nombres «del costat i de la diagonal».

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

Les galetes de les colònies

La solució de Dudeney

El nombre més petit de galetes devia ser 1021, d'on es veu clarament que eren d'aquelles galetes petitones que agraden tant als infants.

La solució general és que, per a n homes, el nombre ha de ser $m \cdot n^{n+1} - (n-1)$, on m és qualsevol nombre enter. Cada home rebrà $m \cdot (n-1)^n - 1$ galetes en el repartiment final, tot i que, en el cas de dos homes, quan $m = 1$, el repartiment final només beneficia el gos. És clar que, en tots els casos, cada home roba una n-ena part de les galetes, després de donar la sobrant al gos.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Provant tots els nombres, els que funcionen són 1021, 2045, 3069...: és a dir, $1021 + 1024 \cdot k$. Amb 1021, els amics es mengen 255, 191, 143 i 107 galetes, i al matí en queden 321: 80 per a cadascú i 1 per al gos. La fórmula general de Dudeney també s'ha comprovat per a 2, 3, 4 i 5 amics (dona 7, 79, 1021 i 15 621).

Per què 1024. Si a la capsa hi hagués 3 galetes més, cada amic es menjaria exactament un quart de tot i en deixaria tres quarts. Perquè les quatre nits i el matí surtin exactes, el nombre de galetes més 3 s'ha de poder dividir cinc vegades per 4: ha de ser múltiple de $4^5 = 1024$. El més petit és $1024 - 3 = 1021$.

Al text de Project Gutenberg, la fórmula general havia perdut els exponents (n^{n+1} hi surt com «nn+1»): els hem restituït a la traducció.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917). Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

L'espectacle de drons

La solució de Dudeney

Els primers més petits de la forma $4n + 1$ són 5, 13, 17, 29 i 37, i els més petits de la forma $4n - 1$ són 3, 7, 11, 19 i 23. Els primers de la primera forma sempre es poden escriure com a suma de dos quadrats, i d'una sola manera: $5 = 4 + 1$; $13 = 9 + 4$; $17 = 16 + 1$; $29 = 25 + 4$; $37 = 36 + 1$. En canvi, els de la segona forma no es poden escriure mai com a suma de dos quadrats.

Perquè un nombre es pugui escriure com a suma de dos quadrats de diverses maneres, cal que sigui compost i que tingui uns quants primers de la primera forma. Així, el 5 o el 13 sols només es poden escriure d'una manera; però el 65 (5×13) es pot escriure de dues maneres, el 1105 ($5 \times 13 \times 17$), de quatre, i el 32 045 ($5 \times 13 \times 17 \times 29$), de vuit. Cada factor nou d'aquesta forma dobla el nombre de maneres. Fixa't, però, que dic factor *nou*, perquè la repetició de factors segueix una altra llei. El 25 (5×5) no es pot escriure de dues maneres, sinó d'una; en canvi, el 125 ($5 \times 5 \times 5$) es pot escriure de dues, i el 625 ($5 \times 5 \times 5 \times 5$) també; i si hi afegim encara un altre 5, el nombre es pot escriure de tres maneres diferents.

Si un primer de la segona forma entra en el nombre, aquest ja no pot ser suma de dos quadrats. Així, el 15 (3×5) no funciona, ni el 135 ($3 \times 3 \times 3 \times 5$); però si hi posem un nombre parell de 3, sí que funciona, perquè aquests 3 formen un quadrat, tot i que només dona una solució. Així, 45 ($3 \times 3 \times 5$, o 9×5) = $36 + 9$. De la mateixa manera, el factor 2 hi pot ser sempre, i també qualsevol potència de 2, com 4, 8, 16 o 32, però posar-lo o treure'l no canvia mai el nombre de solucions, llevat d'un cas com el 50, on dobla un quadrat i dona les dues respostes $49 + 1$ i $25 + 25$.

Així doncs, quan un nombre està descompost en factors primers, es pot dir d'un cop d'ull si es pot partir en dos quadrats o no; i si es pot, saber de quantes maneres és tan senzill que es pot fer de memòria sense cap esforç. El nombre que vaig donar era el 130. De seguida vaig veure que era $2 \times 5 \times 13$ i, per tant, que com que el 65 es pot escriure de dues maneres ($64 + 1$ i $49 + 16$), el 130 també es pot escriure de dues maneres, perquè el factor 2 no hi té res a veure.

El nombre més petit que es pot escriure com a suma de dos quadrats de dotze maneres diferents és el 160 225, i aquest és, per tant, el nombre més petit de drons que serviria per a l'espectacle. El nombre està format pels factors $5 \times 5 \times 13 \times 17 \times 29$, tots de la forma que cal. Si fossin tots diferents, hi hauria setze maneres; però com que un dels factors es repeteix, n'hi ha exactament dotze. Aquests són els costats de les dotze parelles de quadrats: (400 i 15), (399 i 32), (393 i 76), (392 i 81), (384 i 113), (375 i 140), (360 i 175), (356 i 183), (337 i 216), (329 i 228), (311 i 252), (265 i 300). Si elevem al quadrat els dos nombres de cada parella i els sumem, sempre dona 160 225.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Provant tots els nombres, comptant com Dudeney (cada quadrat amb almenys un dron, i sense importar l'ordre), el 160 225 és el més petit que es pot escriure de 12 maneres, i les dotze parelles coincideixen una per una amb les seves. També surten bé tots els exemples del text: 130, 50, 25, 125, 625, 45, 65, 1105 i 32 045.

La regla, en una línia. Descompon el nombre en primers. Si hi ha algun primer de la forma $4n - 1$ amb exponent senar, no es pot fer. Si no, multiplica (exponent + 1) per a cada primer de la forma $4n + 1$, sense mirar els 2 ni els altres primers: surt un nombre P. Les maneres són la meitat de P, arrodonint cap amunt si el nombre no és un quadrat i cap avall si ho és. Per al 160 225, $P = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$, i en surten 12. Aquesta regla s'ha comprovat per ordinador amb tots els nombres fins a 200 000.

Fermat i Euler. Que els primers de la forma $4n + 1$ són suma de dos quadrats (i els de la forma $4n - 1$, mai) ho va afirmar Pierre de Fermat el 1640, i ho va demostrar Leonhard Euler un segle més tard. És el *teorema dels dos quadrats* de Fermat.

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net

La batalla de Hastings

La solució de Dudeney

Qualsevol nombre (que no sigui un quadrat) es pot multiplicar per un quadrat de manera que el producte sigui 1 menys que un altre quadrat. El nombre donat no pot ser un quadrat, perquè un quadrat per un quadrat és un quadrat, i cap quadrat més 1 no és un quadrat. Tot el que dic s'ha d'entendre amb nombres enters, perquè els soldats fraccionaris no serveixen gaire per a la guerra.

Doncs bé, de tots els nombres del 2 al 99, el 61 és justament el més complicat, i la resposta més petita possible al trencaclosques és que l'exèrcit d'Harold tenia 3 119 882 982 860 264 400 homes. És a dir, hi hauria 51 145 622 669 840 400 homes (el quadrat de 226 153 980) a cada un dels seixanta-un quadrats. Afegint-hi un home (Harold), podrien formar un quadrat gran amb 1 766 319 049 homes a cada costat.

El problema general, del qual aquest és un cas particular, es coneix com a «equació de Pell», segurament perquè Pell no el va proposar ni el va resoldre primer! Fermat el va plantejar com un repte als matemàtics anglesos del seu temps. Es resol fàcilment amb fraccions contínues. Després del 61, el nombre més difícil per sota de 100 és el 97, on $97 \times 6\,377\,352^2 + 1 =$ un quadrat.

La raó per la qual vaig suposar que alguna cosa no quadrava en les xifres de la crònica és que podem dir amb tota seguretat que l'exèrcit d'Harold no tenia més de tres trilions d'homes! Si aquest exèrcit (per no parlar dels normands) hagués tingut tota la superfície de la Terra (mar inclòs) per acampar, cada home hauria tingut una mica més d'1,6 cm^2 per moure's. Dit d'una altra manera: comptant un quadrat d'uns 30 cm de costat per home, cada quadrat petit hauria necessitat tota la superfície d'un globus de tres vegades el diàmetre de la Terra.

Nota del matemàtic

Comprovat per ordinador. Amb nombres enters de precisió il·limitada (BigInt) i la fracció contínua de $\sqrt{61}$, la solució més petita de $x^2 - 61y^2 = 1$ és $x = 1\,766\,319\,049$, $y = 226\,153\,980$. Les xifres de Dudeney s'han comprovat totes, xifra per xifra: $226\,153\,980^2 = 51\,145\,622\,669\,840\,400$, multiplicat per 61 fa 3 119 882 982 860 264 400, i sumant-hi 1 dona $1\,766\,319\,049^2$. També surten bé el 97 ($y = 6\,377\,352$), el 60 ($y = 4$) i el 62 ($y = 8$), i els seus comptes de la superfície de la Terra (una mica més d'1,6 cm^2 per home).

Una història de nou segles. El matemàtic indi Bhāskara II ja va resoldre aquesta mateixa equació, amb el 61, al segle XII, amb el seu mètode *chakravala*. Fermat la va proposar com a repte el 1657, i el nom de Pell li va posar Euler per error: John Pell no hi va tenir gaire a veure. Lagrange va demostrar el 1768 que, si D no és un quadrat, sempre hi ha solució.

Al text de Project Gutenberg, els exemples del 60 i el 62 havien perdut els exponents («$60 \times 42 + 1 = 312$»): els hem restituït a la traducció ($60 \times 4^2 + 1 = 31^2$).

Problemes de Henry E. Dudeney (1857–1930), d'obres de domini públic: The Canterbury Puzzles (1907) i Amusements in Mathematics (1917).
Traducció, adaptació i figures: David Arso Civil (CC BY-NC-SA 4.0). dudeney.step-quiz.net